Série 8

1. Soit $f \in C^0([0,\infty) \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ une fonction telle que l'équation
$$x' = f(t,x) \tag{1}$$
admette une unique solution $x = x(t; t_0, x_0)$ pour toute condition initiale $x(t_0) = x_0,\ t_0 \geqslant 0$. Soit $\phi(t)$ une solution de (1), définie sur un intervalle $[t_\star, \infty),\ t_\star \geqslant 0$. Prouver le résultat suivant.
Si, pour tout $t_0 \geqslant t_\star$ il existe $\delta_1 = \delta_1(t_0)$ tel que
$$|x_0 - \phi(0)| < \delta_1 \implies \lim_{t\to\infty} |x(t; t_0, x_0) - \phi(t)| = 0,$$
alors ϕ est stable.
Remarque : Ainsi, si l'on a unicité pour le problème de Cauchy associé à (1), il est redondant d'imposer que ϕ est stable dans la définition de stabilité asymptotique.

2. On considère l'équation scalaire
$$x' = a(t)x,$$
où $a \in C^0([0,\infty), \mathbb{R})$. Prouver les résultats suivants sur la stabilité de la solution nulle $x \equiv 0$.
   (a) La solution nulle est stable si et seulement si
$$\exists M \geqslant 0,\ \forall t \geqslant 0, \quad \int_0^t a(s)\,\mathrm{d}s \leqslant M.$$
   (b) La solution nulle est uniformément stable si et seulement si
$$\exists M \geqslant 0,\ \forall\, 0 \leqslant t_0 \leqslant t, \quad \int_{t_0}^t a(s)\,\mathrm{d}s \leqslant M.$$
   (c) La solution nulle est asymptotiquement stable si et seulement si $\lim_{t\to\infty} \int_{t_0}^t a(s)\,\mathrm{d}s = -\infty$.

   On considère alors l'exemple $a(t) = \sin(\ln t) + \cos(\ln t) - \alpha$, avec $1 < \alpha < \sqrt{2}$. Montrer que, dans ce cas, la solution nulle est asymptotiquement stable mais pas uniformément stable.
   Indication : Construire deux suites $\{t_{0n}\}, \{t_n\}$ telles que $\int_{t_{0n}}^{t_n} a(s)\,\mathrm{d}s \to \infty$.

3. On considère l'équation autonome
$$x' = f(x),$$
où $f \in C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Prouver que la solution nulle $x \equiv 0$ est uniformément stable si et seulement si elle est stable.

4. Soit $k \in \mathbb{R},\ |k| \leq 1/\sqrt{2}$. Déterminer dans les cas suivants si le système $x' = A(t)x$ est stable, uniformément stable, asymptotiquement stable :
$$\text{(a) } A(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{t} & \frac{\sin t}{t} \\ \frac{\cos t}{t} & -\frac{1}{t} \end{pmatrix}; \quad \text{(b) } A(t) = \begin{pmatrix} 1 & k\sin t \\ k\cos t & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{(c) } A(t) = \begin{pmatrix} \sin t - 1 & \frac{\cos t}{t^2} \\ \sin t & \frac{1}{t^2} - 1 \end{pmatrix}.$$