Série 5

1. Soit $A \in C^0((a,b),\mathbb{R}^{n\times n})$ et $f \in C^0((a,b),\mathbb{R}^n)$. Prouver que toute solution de
$$x' = A(t)x + f(t)$$
est définie sur (a,b).

2. Prouver la proposition 5.2.

3. Prouver le théorème de Liouville (théorème 5.3).

4. Considérons l'équation linéaire du deuxième ordre $y'' - ty' + (1+t)y = 0$.
   (a) Ecrire cette équation comme un système du premier ordre.
   (b) On fixe maintenant les données initiales de deux solutions $y(t), \tilde{y}(t)$:
   $$y(0) = 1,\ y'(0) = 0; \quad \tilde{y}(0) = 1,\ \tilde{y}'(0) = 3.$$
   Déterminer le wronskien $W(t)$ des solutions $y(t), \tilde{y}(t)$ (i.e. le wronskien des solutions correspondantes du système du premier ordre).
   Indication : Utiliser le théorème de Liouville.