Série 4

1. Soit $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ un ouvert et $f = f(t, x; \mu) \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$. Pour $(t_0, x_0; \mu) \in D$, prouver que la solution $x = x(t; \mu)$ du problème de Cauchy
$$x' = f(t, x; \mu), \qquad x(t_0) = x_0,$$
est de classe C^1 en $(t; \mu)$ sur son domaine de définition et que $\partial_\mu x(t; \mu)$ satisfait
$$y' = g(t, x(t, \mu); \mu)\, y + \partial_\mu f(t, x(t; \mu); \mu), \qquad y(t_0) = 0,$$
où
$$g(t, x(t, \mu); \mu) = \partial_x f(t, x(t; \mu); \mu).$$

2. Considérons le problème de Cauchy dépendant du paramètre $\mu \in \mathbb{R}$
$$x' = \frac{t}{1 + e^{\mu x^2}}, \qquad x(0) = 1.$$
   (a) Montrer que, pour tout $\mu \in \mathbb{R}$, la solution $x_\mu(t)$ est unique et globale.
   (b) Déterminer $\lim_{\mu \to 0} x_\mu(t)$ en justifiant rigoureusement votre réponse.

3. Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ et soit $\phi(t; x_0)$ la solution du problème de Cauchy
$$x' = f(x), \qquad x(0) = x_0.$$
On considère les applications $\phi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ définies par $x_0 \mapsto \phi_t(x_0) = \phi(t; x_0)$. Montrer que, pour tout t fixé, ϕ_t préserve le volume si et seulement si $\operatorname{div} f = 0$ sur $\mathbb{R}^n$.

4. Soit $f \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ une fonction localement lipschitzienne en $x \in \mathbb{R}^n$, telle que $f(t, 0) \equiv 0$. Si $x(t)$ est une solution de $x' = f(t, x)$ telle que $x'(0) \neq 0$, montrer que $x(t) \neq 0$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

5. Considérons le problème de Cauchy
$$x' = f(x), \qquad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$
pour $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$. Supposons que $x f(x) < 0$ pour tout $x \neq 0$. Montrer que toute solution de (1) existe sur $[t_0, \infty)$, est monotone sur cet intervalle, et satisfait $\lim_{t \to \infty} x(t) = 0$.