
Série 3

1. Pour $t_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ donnés, on considère le problème de Cauchy d'ordre n suivant :
$$y^{(n)} = g(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \qquad y(t_0) = a_1,\ y'(t_0) = a_2, \ldots, y^{(n-1)}(t_0) = a_n. \tag{1}$$
Déduire du théorème 2.1 le théorème suivant.

   Soit $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un ouvert et $g \in C^0(D, \mathbb{R}^n)$ une fonction de $(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) \in D$, localement lipschitzienne en $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ sur D. Alors il existe $\gamma > 0$ tel que (1) possède une unique solution sur $[t_0 - \gamma, t_0 + \gamma]$.

2. On considère le problème de Cauchy
$$y'' = \frac{1}{t}(y')^{2/3} - y^{3/2} + e^t, \qquad y(t_0) = a_1,\ y'(t_0) = a_2. \tag{2}$$
Prouver les résultats suivants.

   (a) Si $t_0 \neq 0$ et $a_1 > 0$, alors (2) possède une solution.

   (b) Si, de plus, $a_2 \neq 0$, alors cette solution est unique.

3. Déterminer l'intervalle maximal d'existence des solutions du problème de Cauchy
$$x' = \frac{x^2 - 1}{2}, \qquad x(t_0) = x_0,$$
dans les deux cas suivants : (a) $(t_0, x_0) = (0, 0)$; (b) $(t_0, x_0) = (\ln 2, -3)$.

4. Etudier l'existence, l'unicité et l'intervalle maximal d'existence des solutions du problème de Cauchy
$$x' = \ln t + \frac{x}{x^2 + 1}, \qquad x(1) = 0.$$

5. On considère le problème de Cauchy
$$x' = h(t)g(x), \qquad x(t_0) = x_0. \tag{3}$$
On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $h \in C^0([a, \infty), [0, \infty))$, $t_0 \in [a, \infty)$, $g \in C^0([0, \infty), (0, \infty))$, $x_0 \in [0, \infty)$, et
$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{g(x)} = \infty.$$
Montrer que toute solution de (3) existe sur $[t_0, \infty)$.