
Série 2

1. Soit $f \in C^0(D, \mathbb{R}^n)$ où $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ est un ouvert. Prouver que $x(t)$ est une solution du problème
$$x' = f(t,x), \qquad x(t_0) = x_0,$$
sur l'intervalle $[a,b]$ (tel que $t_0 \in (a,b)$) si et seulement si $x(t)$ satisfait l'équation intégrale (formule de Duhamel)
$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, \mathrm{d}s, \qquad t \in [a,b].$$

2. Prouver le résultat suivant (inégalité de Gronwall).

   Soit $M \in \mathbb{R},\ t_0 \in \mathbb{R},\ h \in C^0([t_0,\infty), \mathbb{R}_+)$. Soit $u(t)$ une fonction qui satisfait
$$u(t) \leqslant M + \int_{t_0}^{t} h(s)u(s)\, \mathrm{d}s, \qquad t \geqslant t_0.$$
   Alors
$$u(t) \leqslant M \exp\left(\int_{t_0}^{t} h(s)\, \mathrm{d}s\right).$$
   Enoncer et démontrer un résultat analogue pour $t \leqslant t_0$ et une fonction $h \in C^0((-\infty, t_0], \mathbb{R}_+)$.

3. On considère le problème de Cauchy
$$x' = f(t,x), \qquad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n,$$
sous les hypothèses du théorème 2.1. Prouver en utilisant l'exercice 2 que sa solution est unique.

4. On considère le problème de Cauchy
$$x' = f(x), \qquad x(0) = x_0 \in \mathbb{R},$$
où
$$f(x) = \begin{cases} x \ln|x|, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$
Montrer que les hypothèses du théorème 2.1 ne sont pas vérifiées mais que, néanmoins, ce problème possède une unique solution pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$.

5. Soit $G = J \times K \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, où J est un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ et K un pavé fermé de $\mathbb{R}^n$. Soit $f \in C^0(G, \mathbb{R}^n)$ et $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}_0}$ une suite de fonctions $x_m : J \to K$ qui converge uniformément vers une fonction $x : J \to K$. Prouver que
$$f(t, x_m(t)) \longrightarrow f(t, x(t)) \quad (m \to \infty),$$
uniformément en $t \in J$.