Série 1

1. Montrer que le problème de Cauchy
$$x' = x^2, \qquad x(0) = 0,$$
possède la solution unique $x(t) \equiv 0$ on $\mathbb{R}$.

2. Montrer que le problème de Cauchy
$$x' = \sqrt{|x|}, \qquad x(0) = 0,$$
possède une infinité de solutions $x_c : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, où $c \in \mathbb{R}$ est un paramètre.

3. Le vitesse $v(t)$ d'un mobile de masse $m = 1$ en chute libre, mesurée le long d'un axe vertical, obéit à l'équation de Newton
$$v' = g - f(v), \tag{1}$$
où g est l'accélération de gravitation sur terre et $f(v)$ la force de frottement de l'air.

   (a) Résoudre l'équation (1) dans le cas “basse vitesse” où
   $$f(v) = \mu v, \qquad \mu > 0,$$
   avec condition initiale $v(0) = v_0 \in (0, g/\mu)$. Déterminer la vitesse asymptotique lorsque $t \to +\infty$.

   (b) Résoudre l'équation (1) dans le cas “haute vitesse” où
   $$f(v) = \lambda v^2, \qquad \lambda > 0,$$
   avec condition initiale $v(0) = v_0 > \sqrt{g/\lambda}$. Déterminer la vitesse asymptotique lorsque $t \to +\infty$.

   (c) Comparer les résultats obtenu avec le cas où le frottement de l'air est négligeable, $f \equiv 0$.

4. (a) Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne sur I. Montrer que f est uniformément continue sur I.

   (b) Montrer que les fonctions suivantes sont uniformément continues sur tout intervalle compact de $\mathbb{R}$ mais ne sont pas lipschitziennes sur les voisinages de 0 :
   $$\text{(a) } f(x) = \sqrt{|x|}, \qquad \text{(b) } g(x) = \begin{cases} x \ln |x|, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

5. Soit $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ et $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur (a, b). Prouver les résultats suivants :

   (a) f' est bornée sur (a, b) si et seulement si f est lipschitzienne sur (a, b) ;

   (b) si f' est continue sur (a, b), alors f est localement lipschitzienne sur (a, b).