Série 13

L'objectif de cette série est de finir la preuve commencée la semaine dernière du théorème :

Theorème. Berestycki-Lions-Peletier(1981)
Soit $p > 1$. Il existe un nombre réel $\zeta > 0$ tel que la solution $u \in C^2(\mathbb{R}_+)$ du problème à valeur initiale

$$\begin{cases} -u'' - \dfrac{1}{r}u' = g(u) = \begin{cases} -u + u^p, & u \geq 0 \\ 0, & u < 0 \end{cases}, \\ u(0) = \zeta, u'(0) = 0 \end{cases}$$

a les propriétés que $u(r) > 0$ pour tout $r \in [0, +\infty)$, $u'(r) < 0$ pour tout $r \in (0, +\infty)$ et

$$\lim_{r \mapsto +\infty} u(r) = 0.$$

Il reste à montrer que les ensembles

$$\begin{aligned} P &= \{\zeta \in I; \exists r_0 = r_0(\zeta) > 0 \text{ t.q. } u'(\zeta, r_0) = 0 \text{ et } u(\zeta, r) > 0, \text{ pour } r \in [0, r_0]\} \\ N &= \{\zeta \in I; \exists r_0 = r_0(\zeta) > 0 \text{ t.q. } u(\zeta, r_0) = 0 \text{ et } u'(\zeta, r) < 0, \text{ pour } r \in (0, r_0]\} \end{aligned}.$$

sont non-vides, ouverts et disjoints, et ainsi conclure la preuve.

1. Argumenter que P et N sont disjoints.
2. Montrer que P est non-vide. *Indice 1 : Prouver que si* $\zeta \in \left(1, \left(\dfrac{p+1}{2}\right)^{\frac{1}{p-1}}\right]$, *alors* ζ *est dans* P.
3. Montrer que N est non-vide (difficile).
4. Montrer que P et N sont ouverts. *Indice 1 : Justifier la continuité de* $\zeta \mapsto u(\zeta, r)$.
5. Conclure le théorème.