Série 12

L'objectif de cette série est de prouver le théorème suivant :

Theorème. Berestycki-Lions-Peletier(1981)
Soit $p > 1$. Il existe un nombre réel $\zeta > 0$ tel que la solution $u \in C^2(\mathbb{R}_+)$ du problème à valeur initiale

$$\begin{cases} -u'' - \dfrac{1}{r}u' = g(u) = \begin{cases} -u + u^p, & u \geq 0 \\ 0, & u < 0 \end{cases}, \\ u(0) = \zeta, u'(0) = 0 \end{cases}$$

a les propriétés que $u(r) > 0$ pour tout $r \in [0, +\infty)$, $u'(r) < 0$ pour tout $r \in (0, +\infty)$ et

$$\lim_{r \mapsto +\infty} u(r) = 0.$$

La preuve se divise en plusieurs étapes.

1. Pour toute valeur initiale $\zeta \in \mathbb{R}_+$, justifier l'existence et l'unicité d'une solution $u(\zeta, r)$ sur un intervalle d'existence maximal $[0, r_\zeta)$.

2. Prouver que pour toute valeur initiale $u(\zeta, 0) = \zeta \in (1, +\infty) =: I$, l'intervalle d'existence maximal est $[0, +\infty)$.
   Indice 1 : Utiliser le corollaire 3.1, *c'est-à-dire prouver que pour tout intervalle de la forme* $[0, R)$, $R > 0$, *la fonction* $u(\zeta, r)$ *est bornée.*
   Indice 2 : Définir la fonction $G(r) = \int_0^r g(s)ds$, *et prouver que pour tout* $r > \zeta$ *alors*
   $$G(u(\zeta, r)) \leq G(u(\zeta, 0)) = G(\zeta)$$
   à l'aide de l'EDO $-u''(r) - \frac{1}{r}u'(r) = g(u)$. *En déduire que* $u(\zeta, r) \leq \zeta$. *Pour la borne inférieure, utiliser la solution explicite de l'équation lorsque* $u \leq 0$.

3. Soit $\zeta_1 \in (0, +\infty)$. Montrer que si $u(\zeta_1, r) > 0$ pour tout $r \geq 0$ et si $u'(\zeta_1, r) < 0$ pour tout $r > 0$, alors $l = \lim_{r \mapsto +\infty} u(\zeta_1, r)$ satisfait
   $$g(l) = 0.$$
   De plus, montrer que $l \neq 1$, et en déduire que $l = 0$.
   Indice 1 : Pour la deuxième partie, procéder par contradiction. Définir $v(r) = \sqrt{r}[u(r) - 1]$, montrer qu'il existe $R_1 > 0$ tel que $v''(r) < 0$ pour tout $r \geq R_1$ et que cela mène à une contradiction.

4. Définissons les ensemble :
   $$\begin{aligned} P &= \{\zeta \in I; \exists r_0 = r_0(\zeta) > 0 \text{ t.q. } u'(\zeta, r_0) = 0 \text{ et } u(\zeta, r) > 0, \text{ pour } r \in [0, r_0]\} \\ N &= \{\zeta \in I; \exists r_0 = r_0(\zeta) > 0 \text{ t.q. } u(\zeta, r_0) = 0 \text{ et } u'(\zeta, r) < 0, \text{ pour } r \in (0, r_0]\} \end{aligned}.$$
   Prouver que ces ensemble sont égaux aux ensembles P et N définis au cours.
   Indice 1 : Utiliser l'exercice précédent.

La fin de la preuve, qui sera au programme de la semaine prochaine, consiste à montrer que les ensemble P et N sont non-vides, ouverts et disjoints. Cela montre que l'ensemble G défini en cours existe.