Série 11

1. Montrer que toute solution de l'équation
$$x'' + \frac{2t}{t^2+1}x = 0$$
possède au plus un zéro dans l'intervalle $[0,\pi]$.

2. On considère l'équation
$$x'' + q(t)x = 0, \tag{1}$$
où $p \in C^0([0,\infty),\mathbb{R})$. Supposons qu'il existe $m_1, m_2 > 0$ tels que $m_1 \leqslant q(t) \leqslant m_2$ pour tout $t \geqslant 0$. Montrer que toute solution non-triviale de (2) possède un ensemble infini dénombrable de zéros consécutifs $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}_0} \subset [0,\infty)$ tels que
$$\frac{\pi}{\sqrt{m_2}} \leqslant t_{n+1} - t_n \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{m_1}}.$$

3. Prouver les théorèmes de comparaison suivants, sans utiliser la transformation de Prüfer.

Théorème 1 : Pour $i = 1, 2$, soit $\phi_i(t)$ une solution non-triviale de
$$(p(t)x')' + q_i(t)x = 0$$
sur l'intervalle $[a,b)$, avec $p, q_i \in C^0([a,b),\mathbb{R})$, $p(t) > 0$ pour tout $t \in [a,b)$. On suppose que $q_1(t) < q_2(t)$ pour tout $t \in [a,b)$. Soit $t_1, t_2 \in [a,b)$ deux zéros consécutifs de ϕ_1. Alors il existe $\tilde{t} \in (t_1,t_2)$ tel que $\phi_2(\tilde{t}) = 0$.

Théorème 2 : Pour $i = 1, 2$, soit $\phi_i(t)$ une solution non-triviale de
$$(p_i(t)x')' + q_i(t)x = 0$$
sur l'intervalle $[a,b)$, avec $p_i, q_i \in C^0([a,b),\mathbb{R})$, $p(t) > 0$ pour tout $t \in [a,b)$. On suppose que $p_1(t) \geqslant p_2(t)$ et $q_1(t) < q_2(t)$ pour tout $t \in [a,b)$. Soit $t_1, t_2 \in [a,b)$ deux zéros consécutifs de ϕ_1. Alors il existe $\tilde{t} \in (t_1,t_2)$ tel que $\phi_2(\tilde{t}) = 0$.

Indications : Pour le théorème 1, démontrer et utiliser l'*identité de Lagrange*
$$p(\phi_1'\phi_2 - \phi_1\phi_2')\Big|_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} (q_2 - q_1)\phi_1\phi_2 \, \mathrm{d}t.$$

Pour le théorème 2, démontrer et utiliser l'*identité de Picone*
$$\frac{\phi_1}{\phi_2}\left(p_1\phi_1'\phi_2 - p_2\phi_1\phi_2'\right)\Big|_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} (q_2 - q_1)\phi_1^2 \, \mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2} (p_1 - p_2)(\phi_1')^2 \, \mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2} q_2 \frac{(\phi_1'\phi_2 - \phi_1\phi_2')^2}{\phi_2^2} \, \mathrm{d}t.$$
(Les cas $\phi_2(t_1) = 0$ ou $\phi_2(t_2) = 0$ se traitent en utilisant la formule de Bernoulli–L'Hospital pour donner un sens au membre de gauche.)

Remarque : Il est intéressant de comprendre pourquoi l'identité de Lagrange ne permet pas de conclure dans ce cas.