Série 10

1. On considère les équations du deuxième ordre
$$x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = f(t), \tag{1}$$
$$(p(t)x')' + q(t)x = h(t), \tag{2}$$
$$x'' + \tilde{q}(t)x = \tilde{h}(t), \tag{3}$$
où tous les coefficients sont supposés continus sur un intervalle (a, b) (borné ou non), avec la condition $p(t) > 0$ pour tout $t \in (a, b)$.
   (a) Montrer que (1) peut toujours s'écrire sous la forme (2).
   (b) Trouver le changement de variables permettant d'écrire (2) sous la forme (3), tout en déterminant sous quelles conditions cette ré-écriture est légitime.

2. Soit $\phi(t)$ une solution non-triviale de l'équation homogène
$$(p(t)x')' + q(t)x = 0 \tag{4}$$
sur l'intervalle (a, b), où les coefficients sont supposés continus, avec $p > 0$. Montrer que, pour tout intervalle compact $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$, ϕ possède au plus un nombre fini de zéros sur $[\alpha, \beta]$.

3. Soit $\phi_1(t), \phi_2(t)$ deux solutions de l'équation homogène (4) sur (a, b). En récrivant (4) comme un système d'ordre 1, montrer que le Wronskien de ϕ_1 et ϕ_2 s'écrit
$$W(t) = p(t)[\phi_1(t)\phi_2'(t) - \phi_1'(t)\phi_2(t)],$$
et qu'il satisfait $W'(t) = 0$ pour tout $t \in (a, b)$.

4. Soit $\phi(t)$ une solution de (4) sur (a, b) telle que $\phi(t) \neq 0$ pour tout $t \in (a, b)$. Soit $t_0 \in (a, b)$. Montrer que la solution générale de (4) est donnée par
$$x(t) = c_1\phi(t) + c_2\phi(t)\int_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{d}s}{p(s)\phi(s)^2}, \qquad t \in (a, b).$$

5. On considère maintenant (4) sur $[a, b)$ avec $-\infty < a < b \leqslant \infty$ et $p, q \in C^0([a, b), \mathbb{R})$. Etant donné une solution $x(t)$ non-triviale, on définit le rayon de Prüfer $r(t)$ et l'angle de Prüfer $\theta(t)$ par
$$r^2(t) = x^2(t) + (px')^2(t), \qquad r(t) > 0,$$
et
$$\tan\theta(t) = \frac{x(t)}{(px')(t)}, \qquad \theta(a) \in [0, \pi),$$
où l'on rappelle que $x(t)$ et $(px')(t)$ ne peuvent s'annuler simultanément. Montrer que les fonctions $r, \theta \in C^1([a, b), \mathbb{R})$ et satisfont
$$r' = \left(\frac{1}{p(t)} - q(t)\right) r \sin\theta\cos\theta, \qquad \theta' = \frac{1}{p(t)}\cos^2\theta + q(t)\sin^2\theta.$$