Série 8

1. Soit $f \in C^0([0,\infty) \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ une fonction telle que l'équation
$$x' = f(t,x) \tag{1}$$
admette une unique solution $x = x(t;t_0,x_0)$ pour toute condition initiale $x(t_0) = x_0,\ t_0 \geqslant 0$. Soit $\phi(t)$ une solution de (1), définie sur un intervalle $[t_\star, \infty),\ t_\star \geqslant 0$. Prouver le résultat suivant.
Si, pour tout $t_0 \geqslant t_\star$ il existe $\delta_1 = \delta_1(t_0)$ tel que
$$|x_0 - \phi(t_0)| < \delta_1 \implies \lim_{t\to\infty} |x(t;t_0,x_0) - \phi(t)| = 0,$$
alors ϕ est stable.
Remarque : Ainsi, si l'on a unicité pour le problème de Cauchy associé à (1), il est redondant d'imposer que ϕ est stable dans la définition de stabilité asymptotique.
Solution : Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse (stabilité asymptotique), pour $t_0 \geq 0$ fixé, il existe $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon, t_0) > 0$ et $T = T(\varepsilon, t_0) \geq t_0$ tels que si $|x_0 - \phi(t_0)| < \delta_1$, alors $|x(t;t_0,x_0) - \phi(t)| < \varepsilon$ pour tout $t \geq T$. Par ailleurs, sur l'intervalle $[t_0, T]$, on utilise la continuité par rapport à la donnée initiale assurée par le théorème 4.2. Sans l'unicité de la solution dépendant de la condition initiale, on ne pourrait pas utiliser cet argument. On sait donc que la fonction
$$(t;t_0,x_0) \mapsto x(t;t_0,x_0) - \phi(t)$$
est continue sur $[t_0,T] \times K$, où K est n'importe quel voisinage compact de $(t_0, \phi(t_0))$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. De ce fait, elle est uniformément continue sur $[t_0,T] \times K$. Donc il existe $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon, t_0)$ tel que pour tout $(t_1, \tilde{t_1}, x_1), (t_2, \tilde{t_2}, x_2) \in [t_0,T] \times K$ satisfaisant $\left|(t_1, \tilde{t_1}, x_1) - (t_2, \tilde{t_2}, x_2)\right| < \delta_2$, alors :
$$\left|x(t_1; \tilde{t_1}, x_1) - \phi(t_1) - x(t_2; \tilde{t_2}, x_2) + \phi(t_2)\right| < \varepsilon.$$
Donc si $|x_0 - \phi(t_0)| = |(t,t_0,x_0) - (t,t_0,\phi(t_0))| < \delta_2$, avec $(t,t_0,x_0), (t,t_0,\phi(t_0)) \in [t_0,T] \times K$:
$$|x(t;t_0,x_0) - \phi(t)| = |x(t;t_0,x_0) - \phi(t) - x(t;t_0,\phi(t_0)) + \phi(t)| < \varepsilon,$$
où on a utilisé que $\phi(t) = x(t;t_0,\phi(t_0))$ par unicité de la solution.
Il en résulte que si $|x_0 - \phi(t_0)| < \min\{\delta_1, \delta_2\}$, cela implique que :
$$|x(t;t_0,x_0) - \phi(t)| < \varepsilon,$$
pour tout $t \geq t_0$. Donc ϕ est stable.

2. On considère l'équation scalaire
$$x' = a(t)x,$$
où $a \in C^0([0,\infty), \mathbb{R})$. Prouver les résultats suivants sur la stabilité de la solution nulle $x \equiv 0$.

   (a) La solution nulle est stable si et seulement si
$$\exists M \geqslant 0, \forall t \geqslant 0, \quad \int_0^t a(s)\,\mathrm{d}s \leqslant M.$$

   (b) La solution nulle est uniformément stable si et seulement si
$$\exists M \geqslant 0,\ \forall\, 0 \leqslant t_0 \leqslant t, \quad \int_{t_0}^t a(s)\,\mathrm{d}s \leqslant M.$$

(c) La solution nulle est asymptotiquement stable si et seulement si $\lim_{t\to\infty} \int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s = -\infty$.

On considère alors l'exemple $a(t) = \sin(\ln t) + \cos(\ln t) - \alpha$, avec $1 < \alpha < \sqrt{2}$. Montrer que, dans ce cas, la solution nulle est asymptotiquement stable mais pas uniformément stable.
Indication : Construire deux suites $\{t_{0n}\}, \{t_n\}$ telles que $\int_{t_{0n}}^{t_n} a(s)\,\mathrm{d}s \to \infty$.

Solution : On commence par noter que la remarque 8.2(ii) permet de se ramener au cas de la stabilité de la solution triviale $\phi \equiv 0$, si la solution triviale est une solution de l'EDO. La définition 8.1 se simplifie alors en :
Si $\phi(t) \equiv 0$ est solution de (E), définie sur un intervalle $[t_*, \infty), t_* \geq 0$. On note $x(t; t_0, x_0)$ une solution de (E) avec CI $x(t_0) = x_0$, où $t_0 \geq t_*, x_0 \in \mathbb{R}^n$.

(a) On dit que ϕ est stable si pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $t_0 \geq t_*$, il existe $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ tel que si $|x_0| < \delta$ cela implique que $|x(t; t_0, x_0)| < \varepsilon$, pour tout $t \geq t_0$.
(b) On dit que ϕ est uniformément stable si ϕ est stable et qu'on peut choisir δ indépendant de t_0.
(c) On dit que ϕ est asymptotiquement stable si ϕ est stable et que pour tout $t_0 \geq t_*$, il existe un $\delta_1 = \delta_1(t_0)$ tel que si $|x_0| < \delta_1$ cela implique que $\lim_{t\mapsto\infty} |x(t; t_0, x_0)| = 0$.
(d) On dit que ϕ est instable si ϕ n'est pas stable.

Avec ces caractérisations, et en se rappelant que la solution de l'EDO est de la forme :

$$x_0 \mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}.$$

on peut utiliser les définitions suivantes, comme la solution triviale est solution de l'EDO.

(a) Soit $\varepsilon > 0$ et $t_0 \geq 0$. La définition de la stabilité implique qu'il faut trouver $\delta = \delta(\varepsilon, t_0)$ tel que pour tout $0 < |x_0| < \delta$:

$$|x_0|\, \mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} < \varepsilon, \forall t \geq t_0,$$

ou de manière équivalente :

$$\int_{t_0}^{t} a(s)ds < \ln\left(\frac{\varepsilon}{|x_0|}\right) = M(\varepsilon, t_0), \forall t \geq t_0.$$

Par arbitrarité de t_0, cela implique que ϕ est stable si et seulement si l'intégrale est bornée, c'est-à-dire :

$$\int_{0}^{t} a(s)ds < M, \forall t \geq t_0,$$

pour une constante $M \in \mathbb{R}$.

(b) Un développement similaire à la première partie du point précédent donne directement que

$$\int_{t_0}^{t} a(s)ds < M(\varepsilon), \forall t \geq t_0,$$

c'est-à-dire que M ne dépend pas de t_0 dû à la définition de stabilité uniforme.

(c) De même, la solution explicite de l'équation implique que si ϕ est asymptotiquement stable, alors étant donné $t_0 \geq 0$ et un $\delta_1(t_0) > 0, |x_0| < \delta_1$, la condition est :

$$\lim_{t\mapsto\infty} |x_0|\, \mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} = 0.$$

Comme cela doit être valable pour tout t_0(avec un δ_1 qui dépend de t_0) il en résulte que ϕ est asymptotiquement stable si et seulement si

$$\int_{0}^{t} a(s)ds = -\infty,$$

par les propriétés de l'exponentielle.

Par rapport à l'exemple, il est clair que l'intégrale converge vers $-\infty$ et que la solution nulle est asymptotiquement stable. Pour montrer que la solution n'est pas uniformément stable, nous envoyons le lecteur à l'exemple 3.1.4(qui est technique) du livre de Qingkai Kong, il y a une image qui aide à comprendre quel est le phénomène sous-jacent. L'idée est que les deux suites définies contredisent l'hypothèse (b) de l'exercice, car il est possible que l'intégrale tende vers $-\infty$ lorsque t tend vers $+\infty$, tout en admettant des sous-intervalle où l'intégrale converge vers $+\infty$.

3. On considère l'équation autonome
$$x' = f(x),$$
où $f \in C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Prouver que la solution nulle $x \equiv 0$ est uniformément stable si et seulement si elle est stable.
Solution : Comme abordé en cours, la première constatation est que si $x(t)$ est une solution sur (a, b), alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $x(t + \alpha)$ est une solution sur $(a - \alpha, b - \alpha)$:
$$\frac{d}{dt}\left(x(t+\alpha)\right) = x'(t+\alpha) \cdot \frac{d(t+\alpha)}{dt} = f(x(t+\alpha)).$$
Par définition, si la solution nulle est uniformément stable elle est stable, donc il reste à montrer que la stabilité implique la stabilité uniforme. Supposons donc que $x \equiv 0$ est stable, soit $\varepsilon > 0$ et $t_0 \geq 0$. Par définition, il existe $\delta = \delta(\varepsilon, t_0)$ tel que $|x_0| := |x(t_0)| < \delta$ implique $|x(t; t_0, x_0)| < \varepsilon$. En particulier, il existe $\delta_0 := \delta(\varepsilon, 0)$ tel que $|x(0)| < 0$ impliqe $|x(t; 0, x(0))| < \varepsilon$. Dès lors pour tout $t_0 \geq 0$, soit $y(t)$ une solution de l'EDO satisfaisant $|y(t_0)| <\leq \delta_0$ et définissons $z(t) = y(t + t_0)$. Alors par la première constatation $z(t)$ est une solution de l'ED0 et satisfait $|z(0)| < \delta_0$. De ce fait, $|z(t)| < \varepsilon$ pour tout $t \geq 0$, ce qui implique que $|y(t)| < \varepsilon$, pour tout $t \geq t_0$. Comme δ_0 a été choisit indépendamment de t_0, cela montre la stabilité uniforme et conclut la preuve.

4. Soit $k \in \mathbb{R}$, $|k| \leq 1/\sqrt{2}$. Déterminer dans les cas suivants si le système $x' = A(t)x$ est stable, uniformément stable, asymptotiquement stable :
$$\text{(a) } A(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{t} & \frac{\sin t}{t} \\ \frac{\cos t}{t} & -\frac{1}{t} \end{pmatrix}; \quad \text{(b) } A(t) = \begin{pmatrix} 1 & k\sin t \\ k\cos t & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{(c) } A(t) = \begin{pmatrix} \sin t - 1 & \frac{\cos t}{t^2} \\ \sin t & \frac{1}{t^2} - 1 \end{pmatrix}.$$
Solution : Il est compliqué de trouver une matrice fondamentale ou la matrice principale pour être en mesure d'utiliser le théorème 8.1 qui caractérise les différentes stabilités. Cet exercice nécessite la théorie des mesures de Lozinskii, ce qui sort du cadre de ce cours. Par conséquent, il n'y a pas pas besoin de faire cet exercice. Pour les curieux, cela correspond au chapitre 3.3 du livre de Qingkai Kong.
Nous nous excusons de cette erreur.