Série 7

1. Prouver les points (d) et (e) de la proposition 7.1. **Solution** : Soit $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$.
(d) Soit $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ inversible. Pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\left(T^{-1}BT\right)^i}{i!} = \sum_{i=1}^{k} T^{-1}\frac{B^i}{i!}T = T^{-1}\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{B^i}{i!}\right)T.$$

Par conséquent en passant à la limite nous obtenons :

$$\mathrm{e}^{T^{-1}BT} = \lim_{k\mapsto\infty}\sum_{i=1}^{k} \frac{\left(T^{-1}BT\right)^i}{i!} = T^{-1}\left(\lim_{k\mapsto\infty}\sum_{i=1}^{k}\frac{B^i}{i!}\right)T = T^{-1}\mathrm{e}^{B}T.$$

(e) Soit $B_1, B_2 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ et $B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2n\times 2n}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{B^i}{i!} = \sum_{i=1}^{k}\frac{\begin{pmatrix} B_1^i & 0 \\ 0 & B_2^i \end{pmatrix}}{i!} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{k}\frac{B_1^i}{i!} & 0 \\ 0 & \sum_{i=1}^{k}\frac{B_2^i}{i!} \end{pmatrix}.$$

Par conséquent en passant à la limite nous obtenons :

$$\mathrm{e}^{B} = \lim_{k\mapsto\infty}\sum_{i=1}^{k}\frac{B^i}{i!} = \begin{pmatrix} \lim_{k\mapsto\infty}\sum_{i=1}^{k}\frac{B_1^i}{i!} & 0 \\ 0 & \lim_{k\mapsto\infty}\sum_{i=1}^{k}\frac{B_2^i}{i!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{B_1} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{B_2} \end{pmatrix}.$$

2. Déterminer e^{tA} pour les matrices A suivantes, où $\beta \in \mathbb{R}^*$:

$$\text{(a) } A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\ ; \quad \text{(b) } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\ ; \quad \text{(c) } A = \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix}.$$

Solution :
(a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres sont -1 et -2, associées aux vecteurs propres $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, respectivement. On calcule alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{tA} &= \mathrm{e}^{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -t & 0 \\ 0 & -2t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1}} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} & \mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t} \\ 0 & \mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres sont $2 + i\sqrt{3}$ et $2 - i\sqrt{3}$, associées aux vecteurs propres $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 - i\sqrt{3} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 + i\sqrt{3} \end{pmatrix}$, respectivement. On calcule alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{tA} &= \mathrm{e}^{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 - i\sqrt{3} & -1 + i\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t(2+i\sqrt{3}) & 0 \\ 0 & t(2-i\sqrt{3}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 - i\sqrt{3} & -1 + i\sqrt{3} \end{pmatrix}^{-1}} \\
&= \frac{1}{i2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 - i\sqrt{3} & -1 + i\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t(2+i\sqrt{3})} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{t(2-i\sqrt{3})} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 + i\sqrt{3} & -1 \\ 1 + i\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{2t}}{i2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{it\sqrt{3}} & \mathrm{e}^{-it\sqrt{3}} \\ (-1 - i\sqrt{3})\mathrm{e}^{it\sqrt{3}} & (-1 + i\sqrt{3})\mathrm{e}^{-it\sqrt{3}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 + i\sqrt{3} & -1 \\ 1 + i\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{2t}}{i2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} (-1 + i\sqrt{3})\mathrm{e}^{it\sqrt{3}} + (1 + i\sqrt{3})\mathrm{e}^{-it\sqrt{3}} & -\mathrm{e}^{it\sqrt{3}} + \mathrm{e}^{-it\sqrt{3}} \\ 4\mathrm{e}^{it\sqrt{3}} - 4\mathrm{e}^{-it\sqrt{3}} & (1 + i\sqrt{3})\mathrm{e}^{it\sqrt{3}} + (-1 + i\sqrt{3})\mathrm{e}^{-it\sqrt{3}} \end{pmatrix} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{2t}}{i2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} i2\sqrt{3}\cos(t\sqrt{3}) - i2\sin(t\sqrt{3}) & -i2\sin(t\sqrt{3}) \\ i8\sin(t\sqrt{3}) & i2\sqrt{3}\cos(t\sqrt{3}) + i2\sin(t\sqrt{3}) \end{pmatrix} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{2t}}{3}\begin{pmatrix} 3\cos(t\sqrt{3}) - \sqrt{3}\sin(t\sqrt{3}) & -\sqrt{3}\sin(t\sqrt{3}) \\ 4\sqrt{3}\sin(t\sqrt{3}) & 3\cos(t\sqrt{3}) + \sqrt{3}\sin(t\sqrt{3}) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(c) $A = \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$. On note tout d'abord que :

$$(tA)^1 = t\beta\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, (tA)^2 = t^2\beta^2\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, (tA)^3 = t^3\beta^3\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, (tA)^4 = t^4\beta^4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{tA} &= I_2 + t\beta\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{(t\beta)^2}{2!}I_2 - \frac{(t\beta)^3}{3!}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{(t\beta)^4}{4!}I_2 + ... \\
&= I_2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(t\beta)^{2k}}{(2k)!} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(t\beta)^{2k-1}}{(2k-1)!} \\
&= I_2 \cdot \cos(t\beta) + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \sin(t\beta). \\
&= \begin{pmatrix} \cos(t\beta) & -\sin(t\beta) \\ \sin(t\beta) & \cos(t\beta) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

3. (a) Trouver la matrice principale à $t_0 = 0$ de l'équation

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x.$$

(b) Résoudre le problème de Cauchy

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad x(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Solution :

(a) En utilisant la proposition 7.1(f), on obtient directement que la matrice principale à $t = 0$ est :

$$X(t) = \mathrm{e}^t\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Par le théorème 6.1,

$$\begin{aligned}
x(t) &= \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-s} & -s\mathrm{e}^{-s} \\ 0 & \mathrm{e}^{-s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-s} \\ 0 \end{pmatrix} ds \\
&= \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} -1+t \\ t \end{pmatrix} + \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \int_0^t \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2s} \\ 0 \end{pmatrix} ds \\
&= \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} -1+t \\ t \end{pmatrix} + \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t} + \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^t + t\mathrm{e}^t + \frac{1}{2}\left(-\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^t\right) \\ \mathrm{e}^t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} t\mathrm{e}^t - \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^t\right) \\ \mathrm{e}^t \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

4. Calculer e^{tA} et déterminer la solution générale de l'équation

$$x' = Ax, \qquad \text{avec } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution : On réécrit $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$, avec $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Grâce à la proposition 7.1(f), on obtient directement l'exponentielle de tA_1 est :

$$\mathrm{e}^{tA_1} = \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour la matrice A_2, on calcule :

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{tA_2} &= \mathrm{e}^{t\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \\
&= \mathrm{e}^{t\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \mathrm{e}^{t\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \\
&= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t\cos(t) & -\mathrm{e}^t\sin(t) \\ \mathrm{e}^t\sin(t) & \mathrm{e}^t\cos(t) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé la propriété de commutativité des matrices, ainsi que l'exercice 2. de cette série. Par conséquent :

$$\mathrm{e}^{tA} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{tA_1} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{tA_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} & t\mathrm{e}^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^t\cos(t) & -\mathrm{e}^t\sin(t) \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^t\sin(t) & \mathrm{e}^t\cos(t) \end{pmatrix}.$$

Dès lors, la solution générale est :

$$x(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{t}\cos(t) & -e^{t}\sin(t) \\ 0 & 0 & e^{t}\sin(t) & e^{t}\cos(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t} \\ c_2 e^{2t} \\ c_3 e^{t}\cos(t) - c_4 e^{t}\sin(t) \\ c_3 e^{t}\sin(t) + c_4 e^{t}\cos(t) \end{pmatrix}.$$

5. Trouver la solution générale de l'équation

$$x' = Ax, \qquad \text{avec } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

sans déterminer explicitement e^{tA}.

Solution : On cherche à résoudre sans déterminer l'exponentielle de la matrice A, car il devient compliquer de réaliser le calcul lorsque la matrice ne peut pas être décomposée en blocs de taille inférieure. De ce fait, la méthode des valeurs et vecteurs propres va être utilisée. On calcule tout d'abord les valeurs propres :

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)^2,$$

qui sont donc 1 avec multiplicité algébrique égale à 1 et 2 avec multiplicité algébrique égale à 2. Un vecteur propre associé à 1 est $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, solution du système d'équation suivant :

$$\begin{cases} (1-1)x - z &= 0 \\ (2-1)y + z &= 0 \\ (2-1)z &= 0 \end{cases}.$$

De même pour 2, le système :

$$\begin{cases} (1-2)x - z &= 0 \\ (2-2)y + z &= 0 \\ (2-2)z &= 0 \end{cases}$$

implique que le sous-espace propre associé à 2 est engendré par $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dès lors, deux solutions linéairement indépendantes sont :

$$x_1(t) = e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x_2(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il reste à trouver une troisième solution linéairement indépendantes des deux précédentes. Cherchons-la sous la forme :

$$x_3(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} a_1 t + b_1 \\ a_2 t + b_2 \\ a_3 t + b_3 \end{pmatrix},$$

avec $a_i, b_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, \ldots, 3$. Alors :

$$x_3'(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 2a_1 t + a_1 + 2b_1 \\ 2a_2 t + a_2 + 2b_2 \\ 2a_3 t + a_3 + 2b_3 \end{pmatrix}, \text{ et}$$

$$Ax_3(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} (a_1 - a_3)t + b_1 - b_3 \\ (2a_2 + a_3)t + 2b_2 + b_3 \\ 2a_3 t + 2b_3 \end{pmatrix}.$$

On déduit directement que $a_=1_3 = 0$. Il reste à étudier le système suivant :

$$2b_1 = b_1 - b_3$$
$$a_2 + 2b_2 = 2b_2 + b_3$$
$$=$$

Une solution linéairement indépendante des deux premières est :

$$\mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix} -1 \\ t+\alpha \\ 1 \end{pmatrix},$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$ quelconque. Par conséquent, la solution générale est :

$$x(t) = c_1\mathrm{e}^t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3\mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix} -1 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}.$$