Série 6

1. Montrer que la méthode du facteur intégrant pour l'EDO linéaire du premier ordre est équivalente à la conclusion du théorème 6.1 dans le cas $n = 1$.
Solution : L'EDO linéaire du premier ordre est de la forme
$$x' = a(t)x + f(t)$$
avec $a \in C^0((a,b),\mathbb{R})$. La méthode du facteur intégrant consiste à trouver une fonction $g \in C^1((a,b),\mathbb{R})$ telle que :
$$(g(t)x)' = g(t)x' - g(t)a(t)x = g(t)f(t).$$
La fonction $g(t) := \mathrm{e}^{-\int_{t_0}^t a(s)ds}$, où $t_0, t \in (a,b)$, satisfait la propriété précédente. Alors, en intégrant de chaque coté on obtient :
$$g(t)x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^t g(s)f(s)ds.$$
La solution dérivée par la méthode du facteur intégrant est donc :
$$x(t) = x(t_0)\mathrm{e}^{\int_{t_0}^t a(u)du} + \mathrm{e}^{\int_{t_0}^t a(u)du}\int_{t_0}^t \mathrm{e}^{-\int_{t_0}^s a(u)du}f(s)ds = x(t_0)\mathrm{e}^{\int_{t_0}^t a(u)du} + \int_{t_0}^t \mathrm{e}^{\int_s^t a(u)du}f(s)ds.$$
La solution du problème homogène $x' = a(t)x$ est de la forme
$$y(t) = c\mathrm{e}^{\int_{t_0}^t a(s)ds},$$
avec $c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, t_0, t \in (a,b)$. Dans le cas unidimensionnel, $y(t)$ correspomd à une matrice fondamentale d'inverse $\frac{1}{c}\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^t a(s)ds}$. Le théorème 6.1 assure alors que la solution générale est :
$$x(t) = c\mathrm{e}^{\int_{t_0}^t a(s)ds} + \int_{t_0}^t \mathrm{e}^{\int_{t_0}^t a(s)ds}\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^u a(v)dv}f(u)du = c\mathrm{e}^{\int_{t_0}^t a(s)ds} + \int_{t_0}^t \mathrm{e}^{\int_u^t a(v)dv}f(u)du,$$
ce qui correspond à la méthode du facteur intégrant.

2. Trouver la solution générale du système inhomogène
$$\begin{cases} x_1' = 3x_1 - 4x_2 + (8t+1), \\ x_2' = x_1 - 2x_2 + (2t+1). \end{cases}$$
Solution : Le problème homogène est :
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8t+1 \\ 2t+1 \end{pmatrix}.$$
On commence par calculer les valeurs propres :
$$\det\left(\begin{pmatrix} 3-\lambda & -4 \\ 1 & -2-\lambda \end{pmatrix}\right) = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda+1)(\lambda-2),$$
qui sont donc -1 et 2. Les vecteurs propres associés sont $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, respectivement. Une matrice fondamentale du problème homogène est par conséquent :
$$\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} & 4\mathrm{e}^{2t} \\ \mathrm{e}^{-t} & \mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}, \text{ d'inverse } -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t} & -4\mathrm{e}^{t} \\ -\mathrm{e}^{-2t} & \mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Par le théorème 6.1, la solution générale est :

$$x(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} & 4\mathrm{e}^{2t} \\ \mathrm{e}^{-t} & \mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \int_{t_0}^{t} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} & 4\mathrm{e}^{2t} \\ \mathrm{e}^{-t} & \mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{s} & -4\mathrm{e}^{s} \\ -\mathrm{e}^{-2s} & \mathrm{e}^{-2s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8s+1 \\ 2s+1 \end{pmatrix} ds...$$

qui est fastidieuse à calculer ! Pour éviter cette étape, on recherche une solution particulière du problème non-homogène, en supposant qu'elle est de la forme "polynômes d'ordre 1", c'est-à-dire :

$$x_1 = at + b,$$
$$x_2 = ct + d.$$

Il faut alors résoudre le système :

$$(at+b)' - 3(at+b) + 4(ct+d) = 8t + 1$$
$$(ct+d)' - (at+b) + 2(ct+d) = 2t + 1,$$

qui est équivalent à :

$$\begin{array}{rrrrcl} -3a & & +4c & & = & 8 \\ a & -3b & & +4d & = & 1 \\ -a & & +2c & & = & 2 \\ & -b & +c & +2d & = & 1 \end{array}.$$

On trouve directement que $a = -4$ et $c = -1$, ce qui mène à $b = -1$ et $d = \frac{1}{2}$. De ce fait, la solution générale est :

$$x(t) = \begin{pmatrix} c_1\mathrm{e}^{-t} + c_2 4\mathrm{e}^{2t} \\ c_1\mathrm{e}^{-t} + c_2\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4t - 1 \\ -t + \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

3. Trouver la solution générale de l'équation homogène du deuxième ordre à coefficients constants

$$y'' + 2by' + cy = 0,$$

en fonction des constantes $b, c \in \mathbb{R}$.
Indication : Commencer par chercher une solution de la forme $y(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$.
Solution : On réécrit l'équation homogène du deuxième ordre comme un système du premier ordre à coefficients constants :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & -2b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

avec $y_1 = y$ et $y_2 = y'$. En cherchant ses valeurs propres comme dans l'exercice précédent, on trouve l'équation $\lambda^2 + 2\lambda + c = 0$. Les solutions se séparent en 3 cas, selon la valeur du discriminant $\Delta = 4b^2 - 4c$.

- $\Delta > 0$: il y a deux valeurs propres réelles distinctes $\lambda_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - c}$, associées aux vecteurs propres $v_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -b \pm \sqrt{b^2 - c} \end{pmatrix}$, respectivement. Une matrice fondamentale du système d'ordre 1 est :

$$Y(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t(b-\sqrt{b^2-c})} & \mathrm{e}^{-t(b+\sqrt{b^2-c})} \\ (-b + \sqrt{b^2 - c}) \cdot \mathrm{e}^{-t(b-\sqrt{b^2-c})} & (-b - \sqrt{b^2 - c}) \cdot \mathrm{e}^{-t(b+\sqrt{b^2-c})} \end{pmatrix}.$$

  Par conséquent la solution générale de l'EDO homogène du deuxième ordre $y(t) = y_1(t)$ est égale à :

$$y(t) = c_1\mathrm{e}^{-t(b-\sqrt{b^2-c})} + c_2\mathrm{e}^{-t(b+\sqrt{b^2-c})},$$

  avec c_1 et c_2 deux constantes réelles.

- $\Delta = 0$: il n'y a qu'une seule valeur propre qui induit les solutions de la forme :

$$x_1(t) = c_1 \mathrm{e}^{-tb}.$$

Pour trouver la solution générale, il faut encore obtenir une deuxième solution linéairement indépendante. En supposant que la solution est de la forme $t^k \mathrm{e}^{-tb}$ (l'indépendance linéaire est claire pour $k \geq 1$), on vérifie rapidement qu'avec $k = 1$ cela fonctionne :

$$\begin{aligned}\left(t\mathrm{e}^{-tb}\right)'' + 2b\left(t\mathrm{e}^{-tb}\right)' + c\left(t\mathrm{e}^{-tb}\right) &= \mathrm{e}^{-tb}\left(b^2 t - 2b + 2b\left(-tb+1\right) + ct\right)\\ &= -\mathrm{e}^{-tb} \cdot t \cdot \frac{\Delta}{4}\\ &= 0.\end{aligned}$$

On en déduit que la solution générale est

$$y(t) = \mathrm{e}^{-tb}\left(c_1 + c_2 t\right).$$

- $\Delta < 0$: Il y a deux valeurs propres complexes $\lambda_{1,2} = -b \pm i\sqrt{c - b^2}$ associés aux deux vecteurs propres $\begin{pmatrix} 1 \\ -b \pm \sqrt{c-b^2} \end{pmatrix}$. La solution complexe du système d'ordre 1 est donc :

$$\begin{aligned}X(t) =& c_1 \mathrm{e}^{-t(b - i\sqrt{c-b^2})}\begin{pmatrix} 1 \\ -b + \sqrt{c-b^2}\end{pmatrix} + c_2 \mathrm{e}^{-t(b+i\sqrt{c-b^2})}\begin{pmatrix} 1 \\ -b - \sqrt{c-b^2}\end{pmatrix}\\ =& \mathrm{e}^{-tb}\left[c_1 \begin{pmatrix} \cos(t\sqrt{c-b^2}) + i\sin(t\sqrt{c-b^2}) \\ -b\cos(t\sqrt{c-b^2}) - \sqrt{c-b^2}\sin(t\sqrt{c-b^2}) + i\left(\sqrt{c-b^2}\cos(t\sqrt{c-b^2}) - b\sin(t\sqrt{c-b^2})\right)\end{pmatrix}\right.\\ &\left. + c_2 \begin{pmatrix} \cos(t\sqrt{c-b^2}) - i\sin(t\sqrt{c-b^2}) \\ -b\cos(t\sqrt{c-b^2}) - \sqrt{c-b^2}\sin(t\sqrt{c-b^2}) - i\left(\sqrt{c-b^2}\cos(t\sqrt{c-b^2}) + b\sin(t\sqrt{c-b^2})\right)\end{pmatrix}\right].\end{aligned}$$

En contraignant $c_1 = c_2$, on trouve une première solution réelle :

$$x_1(t) = c_1 \mathrm{e}^{-tb}\begin{pmatrix} \cos(t\sqrt{c-b^2}) \\ -b\cos(t\sqrt{c-b^2}) - \sqrt{c-b^2}\sin(t\sqrt{c-b^2}). \end{pmatrix}$$

De même, en posant $c_1 = -c_2$ on obtient la solution purement imaginaire :

$$x_2(t) = ic_2 \mathrm{e}^{-tb}\begin{pmatrix} \sin(t\sqrt{c-b^2}) \\ \left(\sqrt{c-b^2}\cos(t\sqrt{c-b^2}) - b\sin(t\sqrt{c-b^2})\right)\end{pmatrix}$$

Cependant, comme les coefficients de la matrice sont purement réels, $-ix_2(t)$ est aussi une deuxième solution réelle indépendante de $x_1(t)$. Dès lors, la solution générale s'écrit :

$$y(t) = \mathrm{e}^{-tb}\left(c_1\cos(t\sqrt{c-b^2}) + c_2\sin(t\sqrt{c-b^2})\right).$$

4. Trouver la solution générale des équations suivantes :

$$(a)\ y'' - 4y' + 5y = \mathrm{e}^{2t}; \quad (b)\ y'' - 4y' + 4y = t\mathrm{e}^{2t}; \quad (c)\ y'' - 4y' + 3y = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-t}}.$$

Solution : En utilisant l'exercice précédent, pon trouve les solutions suivantes :

(a) $\Delta/4 = (-2)^2 - 5 = -1 < 0$, donc la solution générale homogène est :

$$x(t) = \mathrm{e}^{2t}\left(c_1\cos(t) + c_2\sin(t)\right).$$

En cherchant une solution particulière de la forme $t^k\mathrm{e}^{2t}$, avec k un entier, on remarque directement qu'avec $k = 0$ on obtient une solution particulière. Par conséquent, la solution générale est :

$$y(t) = \mathrm{e}^{2t}\left(c_1\cos(t) + c_2\sin(t) + 1\right).$$

(b) $\Delta/4 = (-2)^2 - 4 = 0$, donc la solution générale homogène est :

$$x(t) = \mathrm{e}^{2t}\,(c_1 + c_2 t)\,.$$

En cherchant une solution particulière de la forme $t^k \mathrm{e}^{2t}$, avec k un entier, on remarque directement qu'avec $k = 0, 1, 2$ cela ne fonctionne pas. Cenpendant, avec $k = 3$:

$$\left(t^3\mathrm{e}^{2t}\right)'' - 4\left(t^3\mathrm{e}^{2t}\right)' + 4\left(t^3\mathrm{e}^{2t}\right) = \mathrm{e}^{2t}\left(6t + 12t^2 + 4t^3 - 4\left(3t^2 + 2t^3\right) + 4t^3\right) = 6t\mathrm{e}^{2t}.$$

Par conséquent, la solution générale est :

$$y(t) = \mathrm{e}^{2t}\left(c_1 + c_2 t + \frac{t^3}{6}\right).$$

(c) $\Delta/4 = (-2)^2 - 3 = 1 > 0$, donc la solution générale homogène est :

$$x(t) = c_1\mathrm{e}^{t} + c_2\mathrm{e}^{3t}.$$

Il est plus compliqué de trouver une solution particulière dans ce cas, par conséquent en utilisant le théorème 6.1 ona que la solution générale du problème

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dfrac{}{1+\mathrm{e}^{-t}} \end{pmatrix}$$

est égale à

$$\begin{aligned}
Y(t) &= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & \mathrm{e}^{3t} \\ \mathrm{e}^t & 3\mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ 2_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & \mathrm{e}^{3t} \\ \mathrm{e}^t & 3\mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix} \cdot \int_{t_0}^{t} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^s & \mathrm{e}^{3s} \\ \mathrm{e}^s & 3\mathrm{e}^{3s} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dfrac{}{1+\mathrm{e}^{-s}} \end{pmatrix} ds \\
&= \begin{pmatrix} c_1\mathrm{e}^t + c_2\mathrm{e}^{3t} \\ c_1\mathrm{e}^t + c_2 3\mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & \mathrm{e}^{3t} \\ \mathrm{e}^t & 3\mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix} \cdot \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-4s}\begin{pmatrix} 3\mathrm{e}^{3s} & -\mathrm{e}^{3s} \\ -\mathrm{e}^{s} & \mathrm{e}^{s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dfrac{}{1+\mathrm{e}^{-s}} \end{pmatrix} ds \\
&= \begin{pmatrix} c_1\mathrm{e}^t + c_2\mathrm{e}^{3t} \\ c_1\mathrm{e}^t + c_2 3\mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & \mathrm{e}^{3t} \\ \mathrm{e}^t & 3\mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix} \cdot \int_{t_0}^{t} \begin{pmatrix} \dfrac{-\mathrm{e}^{-s}}{1+\mathrm{e}^{-s}} \\ \dfrac{\mathrm{e}^{-3s}}{1+\mathrm{e}^{-s}} \end{pmatrix} ds \\
&= \begin{pmatrix} c_1\mathrm{e}^t + c_2\mathrm{e}^{3t} \\ c_1\mathrm{e}^t + c_2 3\mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} \begin{pmatrix} \dfrac{-\mathrm{e}^{t-s} + \mathrm{e}^{3(t-s)}}{1+\mathrm{e}^{-s}} \\ \dfrac{-\mathrm{e}^{t-s} + 3\mathrm{e}^{3(t-s)}}{1+\mathrm{e}^{-s}} \end{pmatrix} ds.
\end{aligned}$$

Grâce à ce développement, on infère la solution générale du problème d'ordre 2 :

$$\begin{aligned}
y(t) &= c_1\mathrm{e}^t + c_2\mathrm{e}^{3t} + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} \frac{-\mathrm{e}^{t-s} + \mathrm{e}^{3(t-s)}}{1+\mathrm{e}^{-s}} ds \\
&= c_1\mathrm{e}^t + c_2\mathrm{e}^{3t} + \frac{\mathrm{e}^t}{2}\left[\ln\left(1+\mathrm{e}^{-t}\right) - \ln\left(1+\mathrm{e}^{-t_0}\right)\right] + \frac{\mathrm{e}^{3t}}{2}\int_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{e}^{-3s}}{1+\mathrm{e}^{-s}} ds \\
&= c_1\mathrm{e}^t + c_2\mathrm{e}^{3t} + \frac{\mathrm{e}^t}{2}\left[\ln\left(1+\mathrm{e}^{-t}\right) - \ln\left(1+\mathrm{e}^{-t_0}\right)\right] + \frac{\mathrm{e}^{3t}}{2}\int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-2s} - \mathrm{e}^{-s} + \frac{\mathrm{e}^{-s}}{1+\mathrm{e}^{-s}} ds \\
&= c_1\mathrm{e}^t + c_2\mathrm{e}^{3t} + \frac{1}{2}\left\{\left(\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{3t}\right)\left[\ln\left(1+\mathrm{e}^{-t}\right) - \ln\left(1+\mathrm{e}^{-t_0}\right)\right] - \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{3t-2t_0}\right) + \mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{3t-t_0}\right\}.
\end{aligned}$$