Série 5

1. Soit $A \in C^0((a,b), \mathbb{R}^{n\times n})$ et $f \in C^0((a,b), \mathbb{R}^n)$. Prouver que toute solution de
$$x' = A(t)x + f(t)$$
est définie sur (a,b).
Solution : La première observation est que la Jacobienne de la fonction $G(t,x) = A(t)x + f(t)$ est $A(t)$. Par conséquent, cette fonction est dérivable en x et donc localement Lipschitzienne. Le théorème de Picard nous assure alors que la solution est unique sur son domaine d'existence. De plus, pour tout intervalle (α,β) contenant t_0 tel que $a < \alpha < \beta < b$, la fonction $\tilde{G}(t) = G(t,x(t))$ est bornée car les fonction A et f sont bornées sur (α,β) et on a :
$$\begin{aligned}\left|\tilde{G}(t)\right| &\leq |A(t)| \left|x_0 + \int_{t_0}^t x'(s)ds\right| + |f(t)| \\ &\leq |A(t)|\,|x_0| + |f(t)| + \int_{t_0}^t \left|\tilde{G}(s)\right| ds\end{aligned}$$
ce qui implique par Gronwall
$$|G(t,x(t))| \leq (|A(t)|\,|x_0| + |f(t)|) \cdot \mathrm{e}^{t-t_0}.$$
Par le corollaire 3.1, on a donc existence sur (α,β). Par arbitrarité de cet intervalle, la solution est définie sur (a,b).

2. Prouver la proposition 5.2. On rappelle l'énoncé : Soit $A \in C^0\left((a,b), \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n\right)$. Alors :
   (a) $X(t)$ est une solution matricielle de de (H) si et seulement si
   $$X'(t) = A(t)X(t), \forall t \in (a,b).$$
   (b) $X(t)$ est une matrice fondamentale de (H) si et seulement si
   $$X'(t) = A(t)X(t) \text{ et } \det(X(t)) \neq 0, \forall \in (a,b).$$
   (c) Soit $X(t)$ une matrice fondamentale de (H). Alors $x(t)$ est solution de (H) si et seulement s'il existe $c \in \mathbb{R}^n$ tel que $x(t) = X(t)c, \forall t \in (a,b)$. Explicitement, $c = X^{-1}(t_0)x(t_0)$.
   (d) Il existe une unique matrice principale de (H) à $t = t_0$.

   Solution :
   (a) Evident de la définition d'une solution matricielle.
   (b) Par le point èrécédent $X(t)$ satisfait l'équation matricielle, et les colonnes sont linéairement indépendantes si et seulement si le déterminant est non-nul.
   (c) Soit $x(t)$ est une solution de (H) et définissons $y(t) = X(t)X^{-1}(t_0)x(t_0)$. Alors $x(t_0) = y(t_0)$ et
   $$y'(t) = X'(t)X^{-1}(t_0)x(t_0) = A(t)X(t)X^{-1}(t_0)x(t_0) = A(t)y(t).$$
   Par conséquent, $y(t)$ est aussi solution de (H) et satisfait la même condition initiale que $x(t)$. Par unicité, $x(t) = y(t)$. L'argument montre aussi que si $x(t) = X(t)c$, avec $c \in \mathbb{R}^n$, alors $x(t)$ est solution de (H).

(d) La preuve du théorème 5.2 construit et assure l'existence d'une matrice principale $X(t)$. Supposons que $Y(t) = (y_1(t) \dots y_n(t))$ soit une autre matrice principale à $t = t_0$, avec $y_i(t) \in \mathbb{R}^n$ pour tout $i = 1, \dots n$. Par le point précédent et en utilisant que $X(t_0) = Y(t_0) = I_n$, on obtient l'égalité pour tout $t \in (a, b)$:

$$\begin{aligned} Y(t) &= (y_1(t) \dots y_n(t)) \\ &= \left(X(t)X^{-1}(t_0)y_1(t_0) \dots X(t)X^{-1}(t_0)y_n(t_0)\right) \\ &= (X(t)y_1(t_0) \dots X(t)y_n(t_0)) \\ &= X(t)Y(t_0) \\ &= X(t). \end{aligned}$$

3. Prouver le théorème de Liouville (théorème 5.3).
Solution : On rappelle (série 4, exercice 3) que pour toute matrice inversible $M(t) \in GL_n(\mathbb{R})$ on a que.

$$\frac{d}{dt}\left(\det\left(X(t)\right)\right) = \det(X(t))\mathrm{Tr}\left(\left(X(t)\right)^{-1} X'(t)\right).$$

Par comséquent,

$$\begin{aligned} W'(t) &= \frac{d}{dt}\left(\det\left(X(t)\right)\right) \\ &= \det(X(t))\mathrm{Tr}\left(\left(X(t)\right)^{-1} X'(t)\right) \\ &= W(t)\mathrm{Tr}\left(\left(X(t)\right)^{-1} A(t)X(t)\right) \\ &= W(t)\mathrm{Tr}(A(t)). \end{aligned}$$

où on a utilisé la propriété $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ pour des matrices carrées $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. En résolvant cette équation différentielle déjà rencontrée, on trouve bien que :

$$W(t) = W(t_0)\mathrm{e}^{\int_{t_0}^t \mathrm{Tr}(A(s))ds}, \forall t_0, t \in (a, b).$$

4. Considérons l'équation linéaire du deuxième ordre $y'' - ty' + (1 + t)y = 0$.
   (a) Ecrire cette équation comme un système du premier ordre.
   (b) On fixe maintenant les données initiales de deux solutions $y(t), \tilde{y}(t)$:

   $$y(0) = 1,\ y'(0) = 0; \quad \tilde{y}(0) = 1,\ \tilde{y}'(0) = 3.$$

   Déterminer le wronskien $W(t)$ des solutions $y(t), \tilde{y}(t)$ (i.e. le wronskien des solutions correspondantes du système du premier ordre).
   Indication : Utiliser le théorème de Liouville.

Solution :

(a) On définit $y_1 = y$ et $y_2 = y'$. L'équation se réécrit alors :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y_2 \\ ty_2 - (1+t)y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(1+t) & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

(b) Les conditions initiales permettent de calculer le Wronskien en $t_0 = 0$:

$$W(0) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\right) = 3.$$

Le théorème de Liouville permet donc de trouver le Wronskien :

$$W(t) = W(t_0)\mathrm{e}^{\int_{t_0}^t \mathrm{Tr}(A(s))ds} = 3\mathrm{e}^{\int_0^t s ds} = 3\mathrm{e}^{t^2/2}.$$