
Série 4

1. Soit $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ un ouvert et $f = f(t, x; \mu) \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$. Pour $(t_0, x_0; \mu) \in D$, prouver que la solution $x = x(t; \mu)$ du problème de Cauchy

$$x' = f(t, x; \mu), \qquad x(t_0) = x_0,$$

est de classe C^1 en $(t; \mu)$ sur son domaine de définition et que $\partial_\mu x(t; \mu)$ satisfait

$$y' = g(t, x(t, \mu); \mu)\, y + \partial_\mu f(t, x(t; \mu); \mu), \qquad y(t_0) = 0,$$

où

$$g(t, x(t, \mu); \mu) = \partial_x f(t, x(t; \mu); \mu).$$

Solution : Tout d'abord, rappelons comment dériver une fonction dont les variables dépendent du paramètre par rapport auquel on dérive. Ecrivons

$$f(t, x; \mu) = \begin{pmatrix} f_1(t, x; \mu) \\ \vdots \\ f_n(t, x; \mu) \end{pmatrix}, f_i : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Alors (revoir le cours d'analyse II pour plus de détail) :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \mu}\left(f(t, x; \mu)\right) &= \frac{\partial}{\partial \mu} f(t, x; \mu) \cdot \frac{\partial \mu}{\partial \mu} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} f(t, x; \mu) \cdot \frac{\partial x_k}{\partial \mu} + \frac{\partial}{\partial t} f(t, x; \mu) \cdot \frac{\partial t}{\partial \mu} \\
&= \frac{\partial}{\partial \mu} f(t, x; \mu) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} f(t, x; \mu) \cdot \frac{\partial x_k}{\partial \mu} \\
&= \begin{pmatrix} \partial_\mu f_1(t, x; \mu) \\ \vdots \\ \partial_\mu f_n(t, x; \mu) \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} \partial_{x_k} f_1(t, x; \mu) \cdot \partial_\mu x_k(t; \mu) \\ \vdots \\ \partial_{x_k} f_n(t, x; \mu) \cdot \partial_\mu x_k(t; \mu) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \partial_\mu f_1(t, x; \mu) \\ \vdots \\ \partial_\mu f_n(t, x; \mu) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f_1(t, x; \mu) & \cdots & \partial_{x_n} f_1(t, x; \mu) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_1} f_n(t, x; \mu) & \cdots & \partial_{x_n} f_n(t, x; \mu) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_\mu x_1(t; \mu) \\ \vdots \\ \partial_\mu x_n(t; \mu) \end{pmatrix} \\
&= \partial_\mu f(t, x; \mu) + \partial_x f(t, x; \mu) \cdot \partial_\mu x(t; \mu)
\end{aligned}$$

où $\partial_\mu f, \partial_\mu x \in \mathbb{R}^n$ et la Jacobienne de $f = \partial_x f \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Pour tout μ fixé, il existe une solution unique maximale car $f \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$, donc localement lipschitzienne en x. Le théorème de Picard nous assure que la solution $x(t; \mu)$ est différentiable par rapport à t. Par rapport à μ, remarquons que :

$$\frac{\partial}{\partial \mu}\left(x(t; \mu)\right) = \frac{\partial}{\partial \mu}\left(x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x; \mu) ds\right) = \int_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial \mu}\left(f(s, x; \mu)\right) ds$$

où on justifie la dernière égalité par le fait que $f \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$ et que l'on intègre sur un intervalle borné. Comme l'intégrande appartient à $C^0(D, \mathbb{R}^n)$, on en déduit que $\partial_\mu x(t; \mu)$ est continue et que x est de classe C^1 en $(t; \mu)$. Grâce au rappel précédent, on trouve :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\partial_\mu x(t; \mu)\right) &= \frac{d}{dt}\left(\int_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial \mu}\left(f(s, x; \mu)\right) ds\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial \mu}\left(f(t, x; \mu)\right) \\
&= \partial_\mu f(t, x; \mu) + \partial_x f(t, x; \mu) \cdot \partial_\mu x(t; \mu),
\end{aligned}$$

ce qui est le résultat attendu.

2. Considérons le problème de Cauchy dépendant du paramètre $\mu \in \mathbb{R}$

$$x' = \frac{t}{1+e^{\mu x^2}}, \qquad x(0) = 1.$$

(a) Montrer que, pour tout $\mu \in \mathbb{R}$, la solution $x_\mu(t)$ est unique et globale.

(b) Déterminer $\lim_{\mu \to 0} x_\mu(t)$ en justifiant rigoureusement votre réponse.

Solution :

(a) Soit $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Pour $\mu \in \mathbb{R}$, soit $f_\mu : D \to \mathbb{R}$ définie par $f_\mu(t,x) = \dfrac{t}{1+e^{\mu x^2}}$. Attention, ici lîndice μ ne veut pas signifier la dérivée par rapport à μ, mais simplement que l'on considère le problème de Cauchy pour un μ fixé. Les fonctions $f_\mu \in C^1(D,\mathbb{R})$, donc localement lipschitzienne en x. Le théorème de Picard nous assure une solution unique. De plus, f est bornée sur tout ouvert $D_T = (-T,T), T > 0$. Par le corollaire 3.1, la solution existe sur D_T, et par arbitrarité de T on en déduit que la solution est globale.

(b) Pour $\mu = 0$, il est clair que l'unique solution globale est $x_0(t) = \dfrac{t^2}{2} + 1$. La fonction $f(t,x;\mu)$ et différentiable sur $\mathbb{R}^3$, donc satisfait les conditions du théorème 4.1 (ou 4.2 aussi).Par conséquent, la continuité de $x(t;\mu)$ nous donne :

$$\lim_{\mu \to 0} x_\mu(t) = x_0(t) = \frac{t^2}{2} + 1.$$

3. Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ et soit $\phi(t;x_0)$ la solution du problème de Cauchy

$$x' = f(x), \qquad x(0) = x_0.$$

On considère les applications $\phi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ définies par $x_0 \mapsto \phi_t(x_0) = \phi(t;x_0)$. Montrer que, pour tout t fixé, ϕ_t préserve le volume si et seulement si $\operatorname{div} f = 0$ sur $\mathbb{R}^n$.

Solution : Par le théorème de Picard, pour chaque x_0 la solution est unique et globale par le corollaire 3.1. On note $J_t(x_0)$ la Jacobienne de ϕ_t en x_0. La première étape est de trouver une expression pour sa dérivée. Pour ce faire, exprimons $\phi_t(x_0)$ et $J_t(x_0)$ comme suit :

$$\begin{aligned}
\phi_t(x_0) &= \begin{pmatrix} \phi_{t,1}(x_0) \\ \vdots \\ \phi_{t,n}(x_0) \end{pmatrix} \\
J_t(x_0) &= \begin{pmatrix} \partial_{x_1}\phi_{t,1}(x_0) & \cdots & \partial_{x_n}\phi_{t,1}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_1}\phi_{t,n}(x_0) & \cdots & \partial_{x_n}\phi_{t,n}(x_0) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \partial_{x_1}\phi_t(x_0) & \cdots & \partial_{x_n}\phi_t(x_0) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

avec $\phi_{t,i}(x_0) \in \mathbb{R}$ et $\partial x_i \phi_t(x_0) \in \mathbb{R}^n$, pour tout $i = 1, \ldots, n$. Par le même argument que dans l'exercice 1, on a que :

$$\partial_{x_i}\phi_t(x_0) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial x_i}\left(f(\phi(s,x_0))\right) ds.$$

Pour éviter de se tromper dans les calculs suivants, notons $f = f(y_1, \dots, y_n)$ et $\phi_t = \phi_t(x_1, \dots, x_n)$. Alors on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\partial_{x_i}\phi_t(x_0)\right) &= \frac{d}{dt}\left(\int_0^t \frac{\partial}{\partial x_i}\left(f(\phi(s,x_0))\right) ds\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(f(\phi(t,x_0))\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\begin{pmatrix} f_1(\phi_{t,1}(x_0),\dots,\phi_{t,n}(x_0)) \\ \vdots \\ f_n(\phi_{t,1}(x_0),\dots,\phi_{t,n}(x_0)) \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_1}{\partial y_k}(\phi_t(x_0)) \cdot \frac{\partial \phi_{t,k}}{\partial x_i}(x_0) \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_n}{\partial y_k}(\phi_t(x_0)) \cdot \frac{\partial \phi_{t,k}}{\partial x_i}(x_0) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \partial_{y_1} f_1(\phi_t(x_0)) & \cdots & \partial_{y_n} f_1(\phi_t(x_0)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{y_1} f_n(\phi_t(x_0)) & \cdots & \partial_{y_n} f_n(\phi_t(x_0)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_{x_i}\phi_{t,1}(x_0) \\ \vdots \\ \partial_{x_i}\phi_{t,n}(x_0) \end{pmatrix} \\
&= \partial_y f(\phi_t(x_0)) \cdot \partial_{x_i}\phi_t(x_0),
\end{aligned}$$

où $\partial_y f(\phi_t(x_0))$ est la Jacobienne de f en $\phi_t(x_0)$. Par conséquent, la Jacobienne de ϕ_t en x_0 satisfait l'équation différentielle :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(J_t(x_0)\right) &= \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}\left(\partial_{x_1}\phi_t(x_0)\right) & \cdots & \frac{d}{dt}\left(\partial_{x_n}\phi_t(x_0)\right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \partial_y f(\phi_t(x_0)) \cdot \partial_{x_1}\phi_t(x_0) & \cdots & \partial_y f(\phi_t(x_0)) \cdot \partial_{x_n}\phi_t(x_0) \end{pmatrix} \\
&= \partial_y f(\phi_t(x_0)) \cdot J_t(x_0).
\end{aligned}$$

Dès lors, on peut calculer la dérivée par rapport à t du déterminant de $J_t(x_0)$. Pourquoi s'intéresse-t-on à cette quantité ? Parce que le déterminant représente le volume orienté des n vecteurs qui le composent. Lorsque $t = 0$, $J_0(x_0) = x_0$. Par conséquent J_0 est la matrice identité et son déterminant est égal à 1. Par continuité, il existe un voisinage de 0 tel que J_t est inversible. On rappelle que la différentielle de l'application déterminant en $M \in GL_n(\mathbb{R})$ est égale à

$$d\det_M(H) = \det(M) \cdot \mathrm{Tr}(M^{-1}H), \forall H \in GL_n(\mathbb{R}).$$

On trouve alors :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\det(J_t(X_0))\right) &= d\det_{J_t(x_0)}\left(\frac{d}{dt}(J_t(X_0))\right) \\
&= \det(J_t(x_0)) \cdot \mathrm{Tr}(J_t(x_0)^{-1}\frac{d}{dt}(J_t(X_0))) \\
&= \det(J_t(x_0)) \cdot \mathrm{Tr}(J_t(x_0)^{-1}\partial_y f(\phi_t(x_0))J_t(x_0)) \\
&= \det(J_t(x_0)) \cdot \mathrm{Tr}(\partial_y f(\phi_t(x_0))) \\
&= \det(J_t(x_0)) \cdot \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(\phi_t(x_0))\right) \\
&= \det(J_t(x_0)) \cdot \mathrm{div} f(\phi_t(x_0)).
\end{aligned}$$

Par conséquent, le déterminant de la Jacobienne est constant égal à un si et seulement si la divergence de f est nulle sur $\mathbb{R}^n$. La préservation du volume suit directement. En effet, pour tout domaine

$U \subset \mathbb{R}^n$ mesurable au sens de Lebesgue :

$$\mathrm{Vol}(\phi_t(U)) = \int_{\phi_t(U)} dx = \int_U |\det(J_t(x))|\, dx = \int_U dx = \mathrm{Vol}(U),$$

ce qui est le résultat voulu.

4. Soit $f \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ une fonction localement lipschitzienne en $x \in \mathbb{R}^n$, telle que $f(t, 0) \equiv 0$. Si $x(t)$ est une solution de $x' = f(t, x)$ telle que $x'(0) \neq 0$, montrer que $x(t) \neq 0$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.
Solution : Le théorème de Picard nous assure que la solution est unique. Supposons par l'absurde que $x(t_1) = 0$ pour un certain $t_1 \in \mathbb{R}$. Alors $x(t)$ est aussi solution du problème de Cauchy :

$$x' = f(t, x), x(t_1) = 0.$$

Cependant, la fonction triviale $y(t) \equiv 0$ est aussi solution car $f(t, 0) = 0$. Donc $x(t) \equiv 0$, ce qui contredit l'hypothèse $x'(0) = 0$. Par conséquent, $x(t) \neq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

5. Considérons le problème de Cauchy

$$x' = f(x), \qquad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

pour $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$. Supposons que $xf(x) < 0$ pour tout $x \neq 0$. Montrer que toute solution de (1) existe sur $[t_0, \infty)$, est monotone sur cet intervalle, et satisfait $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.
Solution : Soit $x(t)$ une solution du problème de Cauchy et soit $T > |t_0|$. Définissons $D_T = (-T, T)$. Alors f est bornée sur D_T, donc $x(t)$ existe sur D_T. Par arbitrarité de T, $x(t)$ existe sur $\mathbb{R}$ et donc sur $[t_0, +\infty)$. Pour montrer la monotonie, on prouve que $x(t)$ garde le même signe, ce qui implique que $f(x(t)) = x'(t)$ garde aussi le même signe et que $x(t)$ est monotone. Par hypothèse, on sait que $x(t)$ et $x'(t)$ ont leurs signes opposé (pour $x \neq 0$) et on a que :

$$\frac{d}{dt}\left(x^2(t)\right) = 2x(t)x'(t) < 0.$$

On a donc, pour tout $t_0 \leq t_1 \leq t_2 < +\infty$, $x^2(t_2) \leq x^2(t_1)$ car

$$x^2(t_2) - x^2(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(x^2(t)\right) dt = \int_{t_1}^{t_2} 2x(t)x'(t)dt \leq 0.$$

L'inégalité est stricte si $x(t_1) \neq 0$, et si $x(t_1) = 0$ alors $x(t_2) = 0$ pour tout $t_2 \geq t_1$. On obtient que $x(t)$ garde le même signe car si ce n'était pas le cas on pourrait trouver, par continuité de la solution, $t_0 \leq t_1 < t_2 < +\infty$ tels que $\mathrm{sgn}(t_1) \neq \mathrm{sgn}(t_2)$ et $|x(t_1)| > |x(t_2)|$. Cela contredit $x^2(t_2) \leq x^2(t_1)$, donc $x(t)$ est monotone.