
Série 3

1. Pour $t_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ donnés, on considère le problème de Cauchy d'ordre n suivant :

$$y^{(n)} = g(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \qquad y(t_0) = a_1,\ y'(t_0) = a_2, \ldots, y^{(n-1)}(t_0) = a_n. \tag{1}$$

Déduire du théorème 2.1 le théorème suivant.

Soit $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un ouvert et $g \in C^0(D, \mathbb{R}^n)$ une fonction de $(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) \in D$, localement lipschitzienne en $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ sur D. Alors il existe $\gamma > 0$ tel que (1) possède une unique solution sur $[t_0 - \gamma, t_0 + \gamma]$.

Solution : L'idée est de réexprimer le système comme une EDO du premier ordre. On procède de la manière suivante : soit $y_1, \ldots, y_{n-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et tels que :

$$\begin{aligned} y'(t) &= y_1(t) \\ y_1'(t) &= y_2(t) \\ y_{n-2}'(t) &= y_{n-1}(t) \\ y_{n-1}'(t) &= g(t, y_1(t), \ldots, y_{n-1}(t)) \end{aligned}$$

avec condition initiale $y(t_0) = a_1, y_1(t_0) = a_2, \ldots, y_{n-1}(t_0) = a_n$. En notant $x(t) = (y(t), y_1(t), \ldots, y_{n-1}(t)) \in \mathbb{R}^n$ et $f(t, x) = (y_1, \ldots, y_{n-1}, g(t, x)) = (x_2, \ldots, x_n, g(t, x)) \in \mathbb{R}^n$, on obtient l'EDO du premier ordre :

$$x'(t) = f(t, x(t)), x(t_0) = (a_1, \ldots, a_n).$$

La fonction $f \in C^0(D, \mathbb{R}^n)$ est localement lipschitz en x, car g l'est et toute fonction linéaire l'est aussi. Le théorème 2.1 nous assure de l'existence d'un $\gamma > 0$ tel que le problème de Cauchy admet une solution unique sur $[t_0 - \gamma, t_0 + \gamma]$, et par conséquent le problème de Cauchy d'ordre n aussi.

2. On considère le problème de Cauchy

$$y'' = \frac{1}{t}(y')^{2/3} - y^{3/2} + e^t, \qquad y(t_0) = a_1,\ y'(t_0) = a_2. \tag{2}$$

Prouver les résultats suivants.

(a) Si $t_0 \neq 0$ et $a_1 > 0$, alors (2) possède une solution.

(b) Si, de plus, $a_2 \neq 0$, alors cette solution est unique.

Solution : Dans le même esprit que l'exercice 1, soit $x(t) = (x_1(t), x_2(t)) := (y(t), y'(t))$ et

$$f(t, x(t)) = \left(x_2(t), \frac{1}{t}(x_2(t))^{2/3} - (x_1(t))^{3/2} + \mathrm{e}^t \right).$$

On réécrit le problème de Cauchy comme une EDO du premier ordre :

$$x'(t) = f(t, x(t)), (t_0, x_0) = (t_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2.$$

(a) Si $t_0 \neq 0$ et $a_1 > 0$, alors f est continue sur $D := \mathbb{R}\backslash\{0\} \times (0, \infty) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ et $(t_0, x_0) \in D$. La condition $a_1 > 0$ est important, car sinon l'expression $(x_1(t))^{3/2}$ n'est pas définie (sur $\mathbb{R}$) dans un voisinage de a_1. Le théorème de Cauchy-Peano assure alors l'existence d'une solution.

(b) Si, de plus, $a_2 \neq 0$, alors $(t_0, x_0) \in \tilde{D} := \mathbb{R}\backslash\{0\} \times (0, \infty) \times \mathbb{R}\backslash\{0\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ et f est différentiable sur $\tilde{D}$. En effet, la perte de différentiabilité survient lorsque t ou x_2 est égal à 0. Cela implique que f est localement lipschitzeinne en x sur $\tilde{D}$ (voir série 1 exercice 5). Par le théorème de Picard, la solution est unique.

3. Déterminer l'intervalle maximal d'existence des solutions du problème de Cauchy
$$x' = \frac{x^2-1}{2}, \qquad x(t_0) = x_0,$$
dans les deux cas suivants : (a) $(t_0, x_0) = (0, 0)$; (b) $(t_0, x_0) = (\ln 2, -3)$.
Solution :
(a) L'expression $-2\frac{x'(t)}{1-x^2(t)}$ est bien définie au voisinage de $(t_0, x_0) = (0, 0)$. En utilisant un développement similaire à l'exerice 3 de la série 1 (le cas $v_0 \in (0, \sqrt{g/\lambda})$), on obtient :
$$t = -2\,\mathrm{arctanh}(x(t))$$
et donc $x(t) = \tanh(-t/2)$. On vérifie bien que pour tout $t \in \mathbb{R}$:
$$\frac{d}{dt}(\tanh(-t/2)) = \left(1 - \tanh^2(-t/2)\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\tanh^2(-t/2) - 1}{2}.$$
La fonction tangeante hyperbolique est définie sur toute la droite réelle, on en déduit que l'intervalle maximal est $\mathbb{R}$.
(b) L'expression $-2\frac{x'(t)}{1-x^2(t)}$ est bien définie au voisinage de $(t_0, x_0) = (\ln(2), 3)$. En utilisant un développement similaire à l'exerice 3 de la série 1 (le cas $v_0 > \sqrt{g/\lambda}$), on obtient :
$$\frac{\ln(2) - t}{2} = \mathrm{arcoth}(x(t)) - \mathrm{arcoth}(3).$$
et donc $x(t) = \coth\left(\frac{\ln(2)-t}{2} + \mathrm{arcoth}(3)\right)$. Il faut utiliser la fonction argument cotangente hyperbolique avec cette condition initiale et non pas argument tangente hyperbolique (pour plus de développement, regarder l'exerice 3 de la série 1). Ces deux fonctions ont la même dérivée, mais ne sont pas définies sur le même domaine ! La fonction cotangente hyperbolique est une bijection C^∞ de $\mathbb{R}^*$ dans $(-\infty, -1) \cup (1, 1\infty)$ et on a $\lim_{s \mapsto 0} |\coth(s)| = +\infty$. On résoud :
$$0 = \frac{\ln(2) - t}{2} + \mathrm{arcoth}(3) = \frac{1}{2}\left(\ln(2) - t + \ln\left(\frac{3+1}{3-1}\right)\right) = -\frac{t}{2}.$$
On en déduit par le corollaire 3.1 que l'intervalle maximal d'existence est $(0, +\infty)$, et que l'on peut exprimer la solution comme $x(t) = \coth(-t/2)$.

4. Etudier l'existence, l'unicité et l'intervalle maximal d'existence des solutions du problème de Cauchy
$$x' = \ln t + \frac{x}{x^2+1}, \qquad x(1) = 0.$$
Solution : Posons $D = (0, +\infty) \times \mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$ tel que $f(t, x) = \ln(t) + \frac{x}{x^2+1}$. La fonction f est lipschitzienne en x, donc on a unicité et existence d'une solution pour la condition initiale $x(1) = 0$ par le théorème de Picard. De plus, on a l'inégalité :
$$|x(t)| \leq \int_1^t [|\ln(s)| + \left|\frac{x(s)}{1+x^2(s)}\right|] \leq |t-1| \cdot (|\ln(t)| + 1)\,.$$
On déduit du corollaire 3.1 que l'intervalle maximal d'existence est $(0, +\infty)$.

5. On considère le problème de Cauchy
$$x' = h(t)g(x), \qquad x(t_0) = x_0. \tag{3}$$
On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $h \in C^0([a, \infty), [0, \infty))$, $t_0 \in [a, \infty)$, $g \in C^0([0, \infty), (0, \infty))$, $x_0 \in [0, \infty)$, et
$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{g(x)} = \infty.$$
Montrer que toute solution de (3) existe sur $[t_0, \infty)$.
Solution : Supposons par l'absurde que $x(t)$ soit solution du problème de Cauchy, existe sur $[t_0, b)$

avec $b \in (t_0, +\infty)$, mais ne puisse pas être prolongé au-delà de b. Alors, par le corollaire 3.1, on a que $\lim_{s \mapsto b^-} |x(s)| = +\infty$. Comme h et g ont leurs images dans $[0, +\infty)$ et $(0, +\infty)$, respectivement,

$$x(s) - x_0 = \int_{t_0}^{s} h(t) g(t) dt \geq 0,$$

ce qui implique que $\lim_{s \mapsto b^-} x(s) = +\infty$. Comme l'image de g est contenue dans les réels strictement positifs, on a l'égalité, pour $s \in (t_0, b)$:

$$\int_{t_0}^{s} h(t) dt = \int_{t_0}^{s} \frac{x'(t)}{g(x(t))} dt.$$

Ces deux termes sont bien définis, car on intègre des fonctions continue sur un intervalle borné. On constate alors que

$$\lim_{s \mapsto b^-} \int_{t_0}^{s} h(t) dt \leq (b - t_0) \cdot \sup_{s \in (t_0, b)} |(ht)| < +\infty,$$

mais aussi :

$$\lim_{s \mapsto b^-} \int_{t_0}^{s} h(t) dt = \lim_{s \mapsto b^-} \int_{x_0}^{x(s)} \frac{dx}{g(x)} = \int_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{g(x)} = +\infty,$$

ce qui est une contradiction. Par arbitrarité de b, x existe sur $[0, +\infty)$.