SÉRIE 2

1. Soit $f \in C^0(D, \mathbb{R}^n)$ où $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ est un ouvert. Prouver que $x(t)$ est une solution du problème
$$x' = f(t,x), \qquad x(t_0) = x_0,$$
sur l'intervalle $[a,b]$ (tel que $t_0 \in (a,b)$) si et seulement si $x(t)$ satisfait l'équation intégrale (formule de Duhamel)
$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s))\, \mathrm{d}s, \qquad t \in [a,b].$$
Solution : Par définition de la topologie produit, on écrit $D = D_1 \times D_2$, D_1 et D_2 deux ouverts de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n$, respectivement.
Supposons que $x : D \to \mathbb{R}$ satisfait $x'(t) = f(t, x(t)), x(t_0) = x_0$ avec $(t_0, x_0) \in D$. Comme $x' \in \mathcal{C}^0(D_1)$, car $f \in \mathcal{C}^0(D)$, alors $x \in \mathcal{C}^1(D_1)$ et le théorème fondamental de l'analyse nous assure que pour tout $t \in D_1$:
$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^t x'(s)ds = \int_{t_0}^t f(s, x(s))ds,$$
et donc satisfait l'équation intégrale.
Supposons maintenant que $x(t)$ satisfait la formule de Duhamel. On obtient que $x(t_0) = x_0$ et que $x \in \mathcal{C}^1(D_1)$ car $x(t)$ est obtenu en intégrant la fonction $s \mapsto f(s, x(s))$ qui est continue, et donc intégrable sur tout intervalle de la forme $[a,b]$, avec $a, b \in D_1$. En dérivant de chaque côté de la formule, on obient bien $x'(t) = f(t, x(t))$ ce qui est le résultat désiré.

2. Prouver le résultat suivant (inégalité de Gronwall).

   Soit $M \in \mathbb{R},\ t_0 \in \mathbb{R},\ h \in C^0([t_0, \infty), \mathbb{R}_+)$. Soit $u(t)$ une fonction qui satisfait
$$u(t) \leqslant M + \int_{t_0}^t h(s)u(s)\, \mathrm{d}s, \qquad t \geqslant t_0.$$
   Alors
$$u(t) \leqslant M \exp\left(\int_{t_0}^t h(s)\, \mathrm{d}s\right).$$
   Enoncer et démontrer un résultat analogue pour $t \leqslant t_0$ et une fonction $h \in C^0((-\infty, t_0], \mathbb{R}_+)$.
Solution : Définissons tout d'abord $F : [t_0, \infty)] \to \mathbb{R}_+$ par :
$$F(t) = M + \int_{t_0}^t h(s)u(s)ds.$$
En dérivant de chaque côté on obtient :
$$F'(t) = h(t)u(t) \leq h(t)\left(M + \int_{t_0}^t h(s)u(s)ds\right) = h(t)F(t).$$
En d'autres termes :
$$F'(t) - h(t)F(t) \leq 0.$$
Cela nous mène à étudier la fonction $G(t) = F(t)\exp\left(-\int_{t_0}^t h(s)ds\right)$. Sa dérivée satisfait :
$$G'(t) = \frac{d}{dt}\left(F(t)\exp\left(-\int_{t_0}^t h(s)ds\right)\right) = \big(F'(t) - F(t)h(t)\big)\exp\left(-\int_{t_0}^t h(s)ds\right) \leq 0.$$
Ainsi, comme sa dérivée est toujours non-positive, on obtient
$$F(t)\exp\left(-\int_{t_0}^t h(s)ds\right) = G(t) \leq G(0) = F(0) = M,$$

et donc l'inégalité de Gronwall :

$$u(t) \leq F(t) \leq M \exp\left(\int_{t_0}^{t} h(s)ds\right).$$

Supposons maintenant que $t \leq t_0$, $h \in \mathcal{C}^0\left(-\infty, t_0], \mathbb{R}_+\right)$ et que $u(t)$ satisfait toujours :

$$u(t) \leq M + \int_{t}^{t_0} h(s)u(s)ds.$$

Dans ce cas,

$$F(t) = M + \int_{t}^{t_0} h(s)u(s)ds$$

satisfait :

$$F'(t) = -h(t)u(t) \geq h(t)\left(M + \int_{t_0}^{t} h(s)u(s)ds\right) = -h(t)F(t).$$

Ceci implique que :

$$\frac{d}{dt}\left(F(t)\exp\left(-\int_{t_0}^{t} h(s)ds\right)\right) = \big(F'(t) + F(t)h(t)\big)\exp\left(-\int_{t_0}^{t} h(s)ds\right) \geq 0.$$

Comme cette dérivée est positive et que $t \leq t_0$, alors :

$$F(t)\exp\left(-\int_{t_0}^{t} h(s)ds\right) \leq F(0) = M,$$

ce qui a pour conséquence à nouveau :

$$u(t) \leq F(t) \leq M \exp\left(\int_{t_0}^{t} h(s)ds\right).$$

3. On considère le problème de Cauchy

$$x' = f(t,x), \qquad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n,$$

sous les hypothèses du théorème 2.1. Prouver en utilisant l'exercice 2 que sa solution est unique.
Solution : Soit $x_1, x_2 : [t_0 - \gamma, t_0 + \gamma]$ deux solutions du théorème 2.1. En utilisant l'exercice 1 de la série, on a que :

$$x_i(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds, i = 1, 2.$$

Définissons $u(t) = |x_1(t) - x_2(t)|$. Alors, en utilisant le fait que f est $k-$Lipschitz en la deuxième variable on obtient :

$$\begin{aligned} u(t) &= \left|\int_{t_0}^{t} \left(f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s))\right) ds\right| \\ &\leq \int_{t_0}^{t} \left|\left(f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s))\right)\right| ds \\ &\leq \int_{t_0}^{t} k\left|\left(x_1(s) - x_2(s)\right)\right| ds \\ &= \int_{t_0}^{t} ku(s)ds. \end{aligned}$$

Par conséquent, en utilisant l'inégalité de Gronwall avec $M = 0$ et $h(s) = k$ cela implique que $u(t) \leq 0$. Mais par définition, $u(t) \geq 0$ donc $u(t) \equiv 0$ et $x_1(t) = x_2(t)$ sur $[t_0 - \gamma, t_0 + \gamma]$.

4. On considère le problème de Cauchy

$$x' = f(x), \qquad x(0) = x_0 \in \mathbb{R},$$

où

$$f(x) = \begin{cases} x \ln |x|, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Montrer que les hypothèses du théorème 2.1 ne sont pas vérifiées mais que, néanmoins, ce problème possède une unique solution pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$.

Solution : On a vu en série 1, exercice 4, que la fonction f n'est pas lipschitzienne sur les voisinages de 0. Donc f ne vérifie pas toutes les hypotèses du théorème 2.1.

Supposons que $x(t)$ soit solution du problème de Cauchy et qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $x(t_0) \neq 0$. Alors dans un voisinage de t_0, la méthode de séparation des variables nous donne :

$$\begin{aligned} t - t_0 &= \int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{1}{x \ln(|x|)} dx \\ &= \int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{d}{dx} \left(\ln(\ln(|x|))\right) dx \\ &= \ln(\ln(|x(t)|)) - \ln(\ln(|x(t_0)|)). \end{aligned}$$

Ce qui est équivalent à dire que :

$$|x(t)| = \mathrm{e}^{\ln(|x(t_0)|)\cdot \mathrm{e}^{t-t_0}} = |x(t_0)|^{\mathrm{e}^{t-t_0}}.$$

On remarque donc que si la solution est non-nulle en un point alors elle ne s'annule jamais, ce qui implique aussi que la solution triviale $x(t) \equiv 0$ est l'unique qui satisfait le problème de Cauchy avec la condition initiale est $x(0) = 0$. Par conséquent, en prenant en compte la condition initiale $x(0) = x_0$ en $t_0 = 0$ on obtient :

$$x(t) = \operatorname{sgn}(x_0) \cdot |x_0|^{\mathrm{e}^t}.$$

Cette solution est bien définie sur toute la droite réelle, et l'unicité provient de la construction ci-dessus.