
SOLUTIONS : SÉRIE 1

1. Montrer que le problème de Cauchy
$$x' = x^2, \qquad x(0) = 0,$$
possède la solution unique $x(t) \equiv 0$ on $\mathbb{R}$.

Solution : Soit $x(t)$ une solution. Supposons que $x(t_1) \neq 0$ pour un certain $t_1 \in \mathbb{R}$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ et un voisinage $(t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon)$ tel que l'équation
$$\frac{x'(t)}{x^2(t)} = 1$$
est bien définie pour $t \in (t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon)$. En intégrant de chaque côté on obtient :
$$\int_{t_1}^{t} \frac{x'(s)}{x^2(s)} ds = \int_{t_1}^{t} s ds,$$
ce qui est équivalent à :
$$-\frac{1}{x(t)} + \frac{1}{x(t_1)} = t - t_1.$$
Par conséquent, $x(t) = -\frac{1}{t-c}$ pour une certaine constante $c \in \mathbb{R}$ et est solution sur $\mathbb{R}\backslash\{c\}$. On note que soit x n'est pas définie en $0 (c = 0)$, soit $x(0) \neq 0$. Dans les 2 cas il y a une contradiction, donc $x(t_1) = 0$. Par arbitrarité de t_1, $x(t) \equiv 0$.

2. Montrer que le problème de Cauchy
$$x' = \sqrt{|x|}, \qquad x(0) = 0,$$
possède une infinité de solutions $x_c : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, où $c \in \mathbb{R}$ est un paramètre.

Solution : Supposons que $x(t)$ une solution et que $x(t_1) \neq 0$ pour un certain $t_1 \in \mathbb{R}$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ et un voisinage $(t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon)$ tel que l'équation
$$\frac{x'(t)}{\sqrt{|x(t)|}} = 1$$
est bien définie pour $t \in (t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon)$. En intégrant de chaque côté on obtient :
$$\begin{aligned} t - t_1 &= \int_{t_1}^{t} \frac{x'(s)}{\sqrt{|x(s)|}} ds \\ &= 2\sqrt{|x(t)|} - 2\sqrt{|x(t_1)|}. \end{aligned}$$
On en déduit que $x(t)$ est de la forme :
$$|x(t)| = \frac{(t-c)^2}{4}, c \in \mathbb{R},$$
au voisinage de t_1. Comme $x'(t)$ doit être positif, on en déduit que :
$$x'(t) = \begin{cases} \frac{(t-c)}{2} & , \quad c \leq t \\ \frac{-(t-c)}{2} & , \quad c \geq t \end{cases}$$

au voisinage de t_1. De plus, il est clair que la fonction triviale $x(t) \equiv 0$ est solution du problème de Cauchy sur toute la droite réelle. On rappelle que la condition initialee est $x(0) = 0$. Cela nous mène à définir une solution par morceau. Pour $c \geq 0$:

$$x(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < c \\ \frac{(t-c)^2}{4} & , \quad t \geq c \end{cases}$$

est solution du problème de Cauchy et est bien $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Pour $c \leq 0$:

$$x(t) = \begin{cases} -\frac{(t-c)^2}{4} & , \quad t \leq c \\ 0 & , \quad t > c \end{cases}$$

est aussi solution du problème de Cauchy. De plus, on peut combiner ces deux solutions pour trouver une expression générale de la forme :

$$x(t) = \begin{cases} -\frac{(t-c)^2}{4} & , \quad t \leq c_1 \\ 0 & , \quad c_1 < t < c_2 \\ \frac{(t-c)^2}{4} & , \quad t \geq c_2 \end{cases}$$

où $c_1 \leq 0 \leq c_2$.

3. Le vitesse $v(t)$ d'un mobile de masse $m = 1$ en chute libre, mesurée le long d'un axe vertical, obéit à l'équation de Newton

$$v' = g - f(v), \tag{1}$$

où g est l'accélération de gravitation sur terre et $f(v)$ la force de frottement de l'air.

(a) Résoudre l'équation (1) dans le cas "basse vitesse" où

$$f(v) = \mu v, \qquad \mu > 0,$$

avec condition initiale $v(0) = v_0 \in (0, g/\mu)$. Déterminer la vitesse asymptotique lorsque $t \to +\infty$.

(b) Résoudre l'équation (1) dans le cas "haute vitesse" où

$$f(v) = \lambda v^2, \qquad \lambda > 0,$$

avec condition initiale $v_0 \in (0, \sqrt{g/\lambda})$. Déterminer la vitesse asymptotique lorsque $t \to +\infty$. Faire de même avec la condition initiale $v_0 > \sqrt{g/\lambda}$.

(c) Comparer les résultats obtenu avec le cas où le frottement de l'air est négligeable, $f \equiv 0$.

Solution :

(a) L'équation différentielle est dans ce cas $v' = g - v\mu$.Comme $v_0 \in (0, g/\mu)$, l'équation $\dfrac{v'}{g - v\mu} = 1$ est bien définie dans un voisinage I de 0. Pour $t \in I$, on obtient en intégrant de chaque côté :

$$\begin{aligned} t &= \int_0^t \frac{v'(s)}{g - v(s)\mu} ds \\ &= \frac{1}{\mu} \left[\ln(g - v_0\mu) - \ln(g - v(t)\mu) \right], \end{aligned}$$

ce qui est équivalent à :

$$\mathrm{e}^{-\mu t} = \frac{g - v(t)\mu}{g - v_0\mu}$$

et implique que :

$$v(t) = \left(v_0 - \frac{g}{\mu} \right) \mathrm{e}^{-\mu t} + \frac{g}{\mu}.$$

La solution est définie sur toute la droite réelle et satisfait bien le problème de Cauchy pour tout $t \in \mathbb{R}$. De plus, comme $\mu > 0$, le vitesse asymptotique est finie :

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = \lim_{t\to\infty} \left(v_0 - \frac{g}{\mu}\right) \mathrm{e}^{-\mu t} + \frac{g}{\mu} = \frac{g}{\mu}.$$

(b) L'équation différentielle est dans ce cas $v' = g - \lambda v^2$. De nouveau, grâce à la condition initiale $v_0 \in (0, \sqrt{g/\lambda})$ l'équation $\dfrac{v'}{g - \lambda v^2} = 1$ est bien définie dans un voisinage de 0. On reconnaît la dérivée de l'arc tangente hyperbolique :

$$\operatorname{arctanh}'(f(t)) = \frac{f'(t)}{1 - f(v)^2},$$

avec $f(t) \in (-1, 1)$. En intégrant de chaque côté on obtient :

$$\begin{aligned} t &= \int_0^t \frac{1}{g} \cdot \sqrt{\frac{g}{\lambda}} \frac{\sqrt{\frac{\lambda}{g}} \cdot v'(s)}{1 - \left(\sqrt{\frac{\lambda}{g}} v(s)\right)^2} ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{g\lambda}} \left[\operatorname{arctanh}\left(\sqrt{\frac{\lambda}{g}} v(t)\right) - \operatorname{arctanh}\left(\sqrt{\frac{\lambda}{g}} v_0\right)\right], \end{aligned}$$

ce qui implique que :

$$v(t) = \sqrt{\frac{g}{\lambda}} \tanh\left(\sqrt{g\lambda} t + \operatorname{arctanh}\left(\sqrt{\frac{\lambda}{g}} v_0\right)\right).$$

La solution est définie sur toute la droite réelle et satisfait bien le problème de Cauchy pour tout $t \in \mathbb{R}$. La vitesse asymptotique est aussi finie :

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = \lim_{t\to\infty} \sqrt{\frac{g}{\lambda}} \tanh\left(\sqrt{g\lambda} t + \operatorname{arctanh}\left(\sqrt{\frac{\lambda}{g}} v_0\right)\right) = \sqrt{\frac{g}{\lambda}}.$$

De plus, on remarque qu'avec cette condition initiale la vitesse croît jusqu'à la vitesse limite.

Autre démarche pour trouver $v(t)$: On réécrit $\dfrac{1}{g - \lambda v^2(s)} = \dfrac{1}{2g}\left(\dfrac{1}{1 - \sqrt{\lambda/g}\, v(s)} + \dfrac{1}{1 + \sqrt{\lambda/g}\, v(s)}\right)$, ce qui permet de calculer :

$$\begin{aligned} t &= \int_0^t \frac{v'(s)}{g - \lambda v^2(s)} ds \\ &= \frac{1}{2g} \int_{v_0}^{v(t)} \left(\frac{1}{1 - \sqrt{\lambda/g}\, v(s)} + \frac{1}{1 + \sqrt{\lambda/g}\, v(s)}\right) ds \\ &= \frac{1}{2\sqrt{g\lambda}} \Big[\ln\left(1 + \sqrt{\lambda/g}\, v(t)\right) - \ln\left(1 - \sqrt{\lambda/g}\, v(t)\right) \\ &\quad - \ln\left(1 + \sqrt{\lambda/g}\, v_0\right) + \ln\left(1 - \sqrt{\lambda/g}\, v_0\right)\Big] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{g\lambda}} \ln\left[\frac{\left(1 + \sqrt{\lambda/g}\, v(t)\right) \cdot \left(1 - \sqrt{\lambda/g}\, v_0\right)}{\left(1 - \sqrt{\lambda/g}\, v(t)\right) \cdot \left(1 + \sqrt{\lambda/g}\, v_0\right)}\right]. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\mathrm{e}^{\sqrt{g\lambda} t} \cdot \left(1 - \sqrt{\lambda/g}\, v(t)\right) \cdot \left(1 + \sqrt{\lambda/g}\, v_0\right) = \mathrm{e}^{-\sqrt{g\lambda} t} \cdot \left(1 + \sqrt{\lambda/g}\, v(t)\right) \cdot \left(1 - \sqrt{\lambda/g}\, v_0\right)$$

et donc

$$v(t)\cdot\sqrt{\frac{\lambda}{g}}\cdot\left[\left(1+\sqrt{\lambda/g}v_0\right)\mathrm{e}^{\sqrt{g\lambda}t}+\left(1-\sqrt{\lambda/g}v_0\right)\mathrm{e}^{-\sqrt{g\lambda}t}\right]=\left(1+\sqrt{\lambda/g}v_0\right)\mathrm{e}^{\sqrt{g\lambda}t}-\left(1-\sqrt{\lambda/g}v_0\right)\mathrm{e}^{-\sqrt{g\lambda}t},$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned}
v(t) =&\sqrt{\frac{g}{\lambda}}\cdot\frac{\left(1+\sqrt{\lambda/g}v_0\right)\mathrm{e}^{\sqrt{g\lambda}t}-\left(1-\sqrt{\lambda/g}v_0\right)\mathrm{e}^{-\sqrt{g\lambda}t}}{\left(1+\sqrt{\lambda/g}v_0\right)\mathrm{e}^{\sqrt{g\lambda}t}+\left(1-\sqrt{\lambda/g}v_0\right)\mathrm{e}^{-\sqrt{g\lambda}t}}\\
=&\sqrt{\frac{g}{\lambda}}\cdot\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{g\lambda}t+\ln\left(1+\sqrt{\lambda/g}v_0\right)}-\mathrm{e}^{-\sqrt{g\lambda}t+\ln\left(1-\sqrt{\lambda/g}v_0\right)}}{\mathrm{e}^{\sqrt{g\lambda}t+\ln\left(1+\sqrt{\lambda/g}v_0\right)}+\mathrm{e}^{-\sqrt{g\lambda}t+\ln\left(1-\sqrt{\lambda/g}v_0\right)}}\\
=&\sqrt{\frac{g}{\lambda}}\cdot\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{g\lambda}t+\ln\left(1+\sqrt{\lambda/g}v_0\right)/2-\ln\left(1-\sqrt{\lambda/g}v_0\right)/2}-\mathrm{e}^{-\sqrt{g\lambda}t-\ln\left(1+\sqrt{\lambda/g}v_0\right)/2+\ln\left(1-\sqrt{\lambda/g}v_0\right)/2}}{\mathrm{e}^{\sqrt{g\lambda}t+\ln\left(1+\sqrt{\lambda/g}v_0\right)/2-\ln\left(1-\sqrt{\lambda/g}v_0\right)/2}+\mathrm{e}^{-\sqrt{g\lambda}t-\ln\left(1+\sqrt{\lambda/g}v_0\right)/2+\ln\left(1-\sqrt{\lambda/g}v_0\right)/2}}\\
=&\sqrt{\frac{g}{\lambda}}\tanh\left(\sqrt{g\lambda}t+\frac{1}{2}\left(\ln\left(1+\sqrt{\lambda/g}v_0\right)-\ln\left(1-\sqrt{\lambda/g}v_0\right)\right)\right)\\
=&\sqrt{\frac{g}{\lambda}}\tanh\left(\sqrt{g\lambda}t+\operatorname{arctanh}\left(\sqrt{\lambda/g}v_0\right)\right).
\end{aligned}$$

Avec la condition initiale $v_0>\sqrt{g/\lambda}$ l'équation $\dfrac{v'}{g-\lambda v^2}=1$ est bien définie dans un voisinage de 0. On reconnaît la dérivée de l'arc cotangente hyperbolique (qui est la même que celle de l'arc tangente hyperbolique) :

$$\operatorname{arcoth}'(f(t))=\frac{f'(t)}{1-f(v)^2},$$

avec $f(t)\in(-\infty,-1[\cup]1,\infty)$. Le domaine de définition est important ! En intégrant de chaque côté on obtient :

$$t=\frac{1}{\sqrt{g\lambda}}\left[\operatorname{arcoth}\left(\sqrt{\frac{\lambda}{g}}v(t)\right)-\operatorname{arcoth}\left(\sqrt{\frac{\lambda}{g}}v_0\right)\right],$$

ce qui implique que :

$$\begin{aligned}
v(t)&=\sqrt{\frac{g}{\lambda}}\coth\left(\sqrt{g\lambda}t+\operatorname{arcoth}\left(\sqrt{\frac{\lambda}{g}}v_0\right)\right)\\
&=\sqrt{\frac{g}{\lambda}}\frac{1}{\tanh\left(\sqrt{g\lambda}t+\operatorname{arcoth}\left(\sqrt{\frac{\lambda}{g}}v_0\right)\right)}\\
&=\sqrt{\frac{g}{\lambda}}\frac{1}{\left(\sqrt{g\lambda}t+\operatorname{arctanh}\left(\sqrt{\frac{g}{\lambda}}\frac{1}{v_0}\right)\right)},
\end{aligned}$$

où on a utilisée que $\coth(x)=1/\tanh(x)$ et $\operatorname{arctanh}(x)=\operatorname{arcoth}(1/x)$. La solution est définie sur la droite réelle privée de 0 et satisfait bien le problème de Cauchy pour tout $t\in\mathbb{R}^*$. La vitesse asymptotique est aussi finie :

$$\lim_{t\to\infty}v(t)=\lim_{t\to\infty}\sqrt{\frac{g}{\lambda}}\frac{1}{\left(\sqrt{g\lambda}t+\operatorname{arctanh}\left(\sqrt{\frac{g}{\lambda}}\frac{1}{v_0}\right)\right)}=\sqrt{\frac{g}{\lambda}}.$$

On remarque qu'avec cette condition initiale la vitesse décroît jusqu'à la vitesse limite, un comportement contraire au cas précédent.
Montrons comment trouver cette expression avec l'autre démarche.

$$\begin{aligned} t =& \frac{1}{2\sqrt{g\lambda}} \int_{v_0}^{v(t)} \frac{d}{dt} \left[\ln\left(1+\sqrt{\lambda/g}v(s)\right) - \ln\left(\left|1-\sqrt{\lambda/g}v(s)\right|\right)\right] ds \\ =& \frac{1}{2\sqrt{g\lambda}} \ln \left[\frac{\left(1+\sqrt{\lambda/g}v(t)\right)\cdot\left(\sqrt{\lambda/g}v_0 - 1\right)}{\left(\sqrt{\lambda/g}v(t)-1\right)\cdot\left(1+\sqrt{\lambda/g}v_0\right)}\right]. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$e^{\sqrt{g\lambda}t}\cdot\left(\sqrt{\lambda/g}v(t)-1\right)\cdot\left(1+\sqrt{\lambda/g}v_0\right) = e^{-\sqrt{g\lambda}t}\left(1+\sqrt{\lambda/g}v(t)\right)\cdot\left(\sqrt{\lambda/g}v_0-1\right)$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} v(t) =& \sqrt{\frac{g}{\lambda}} \cdot \frac{\left(1+\sqrt{\lambda/g}v_0\right)e^{\sqrt{g\lambda}t} + \left(\sqrt{\lambda/g}v_0 - 1\right)e^{-\sqrt{g\lambda}t}}{\left(1+\sqrt{\lambda/g}v_0\right)e^{\sqrt{g\lambda}t} - \left(\sqrt{\lambda/g}v_0 - 1\right)e^{-\sqrt{g\lambda}t}} \\ =& \sqrt{\frac{g}{\lambda}} \cdot \frac{e^{\sqrt{g\lambda}t+\ln\left(1+\sqrt{g/\lambda}v_0^{-1}\right)} - e^{-\sqrt{g\lambda}t+\ln\left(1-\sqrt{g/\lambda}v_0^{-1}\right)}}{e^{\sqrt{g\lambda}t+\ln\left(1+\sqrt{g/\lambda}v_0^{-1}\right)} + e^{-\sqrt{g\lambda}t+\ln\left(1-\sqrt{g/\lambda}v_0^{-1}\right)}} \\ =& \sqrt{\frac{g}{\lambda}} \frac{1}{\tanh\left(\sqrt{g\lambda}t + \frac{1}{2}\left(\ln\left(1+\sqrt{g/\lambda}v_0^{-1}\right) - \ln\left(1-\sqrt{g/\lambda}v_0^{-1}\right)\right)\right)} \\ =& \sqrt{\frac{g}{\lambda}} \frac{1}{\tanh\left(\sqrt{g\lambda}t + \operatorname{arctanh}\left(\sqrt{g/\lambda}v_0^{-1}\right)\right)}. \end{aligned}$$

(c) Quand le frottement de l'air est négligeable, alors $v(t) = gt + v_0$ et $\lim_{t\mapsto\infty} v(t) = +\infty$. Le comportement asymptotique diffère donc des deux cas précédents où l'on atteignait une vitesse limite finie.

4.

(a) Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne sur I. Montrer que f est uniformément continue sur I.

(b) Montrer que les fonctions suivantes sont uniformément continues sur tout intervalle compact de $\mathbb{R}$ mais ne sont pas lipschitziennes sur les voisinages de 0 :

$$\text{(a) } f(x) = \sqrt{|x|}, \qquad \text{(b) } g(x) = \begin{cases} x\ln|x|, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Solution :

(a) Notons k la constante de Lipschitz assosciée à f et soit $\varepsilon > 0$. On veut montrer qu'il existe $\delta = \delta(\varepsilon, k)$ tel que pour tout $x, y \in I$ satisfaisant $|x-y| \leq \delta$ alors $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. Posons $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$. Alors, pour tout $x, y \in I$ tels que $|x-y| \leq \delta$:

$$|f(x) - f(y)| \leq k\,|x-y| \leq k\delta = \varepsilon.$$

Par arbitrarité de ε, on a montré que f est uniformément continue sur I.

(b) Pour tout $k > 0$, on montre que f et g ne sont pas $k-$Lipschitz au voisinage de 0. Soit donc $k > 0$.

(i) La fonction $\sqrt{|x|}$ est dérivable sur $(0,1)$, donc pour tout $0 < x_1 < x_2 < \min\left(\frac{1}{4k^2}, 1\right)$ on a :

$$\begin{aligned}
|f(x_2) - f(x_1)| &= \left|\int_{x_1}^{x_2} f'(x)dx\right| \\
&= \left|\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{2\sqrt{x}}dx\right| \\
&\geq |x_2 - x_1| \cdot \inf_{x\in[x_1,x_2]} \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
&= |x_2 - x_1| \frac{1}{2\sqrt{x_2}} \\
&> |x_2 - x_1| \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4k^2}}} \\
&= k\,|x_2 - x_1|\,.
\end{aligned}$$

Donc f n'est pas localement Lipschitz en 0.

(ii) La fonction $x\ln(x)$ est dérivable sur $(0,1)$, donc pour tout $0 < x_1 < x_2 < \min\left(\mathrm{e}^{-k-1}, 1\right)$ on a :

$$\begin{aligned}
|g(x_2) - g(x_1)| &= \left|\int_{x_1}^{x_2} (\ln(x) + 1)\right| dx \\
&= \left|\int_{x_1}^{x_2} \ln(x)dx + (x_2 - x_1)\right| \\
&\geq \left|\int_{x_1}^{x_2} \ln(x)dx\right| - |(x_2 - x_1)| \\
&\geq |x_2 - x_1|\,(|\ln(x_2)| - 1) \\
&> |x_2 - x_1|\,(|-k-1| - 1) \\
&= k\,|x_2 - x_1|\,.
\end{aligned}$$

Donc g n'est pas localement Lipschitz en 0.

5. Soit $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur (a,b). Prouver les résultats suivants :

(a) f' est bornée sur (a,b) si et seulement si f est lipschitzienne sur (a,b) ;

(b) si f' est continue sur (a,b), alors f est localement lipschitzienne sur (a,b).

Solution :

(a) Supposons que f' est bornée et soit $M := \sup_{x\in(a,b)} |f'(x)|$. Alors f est $M-$Lipschitz. En effet, pour tout $x, y \in (a,b)$:

$$\begin{aligned}
|f(y) - f(x)| &= \left|\int_x^y f'(t)dt\right| \\
&\leq |y - x| \sup_{x\in(a,b)} \left|f'(x)\right| \\
&= M\,|y - x|\,.
\end{aligned}$$

Supposons maintenant que f est $k-$Lipschitz pour un certain $k > 0$. Alors pour tout $t \in (a,b)$ et $h \in (-\min(|t-a|, |t-b|), \min(|t-a|, |t-b|))$:

$$\left|\frac{f(t+h) - f(t)}{h}\right| \leq \frac{k\,|t-h-t|}{|h|} = k.$$

Par continuité de la valeur absolue, on a donc en passant à la limite :

$$\left|f'(t)\right| = \left|\lim_{h\to 0} \frac{f(t+h)-f(t)}{h}\right| = \lim_{h\to 0} \left|\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\right| \leq k.$$

Donc f' est borné par k.

(b) Comme f' est continue, f' est borné sur tout compact $K \subset \mathbb{R}$, et donc lipschitzienne sur l'intérieur de K par le point précédent. Cependant, la constante de Lipschitz dépend du compact, c'est à dire $k = k(K)$. Soit $t \in (a,b)$ et définissons $\varepsilon = \dfrac{1}{2}\min\left(|t-a|\, t, t-b\right) > 0$. Alors $[t-\varepsilon, t+\varepsilon]$ est inclus dans (a,b) et est compact, donc f est $k-$ Lipschitz sur $(t-\varepsilon, t+\varepsilon)$ avec un certain $k = k(\varepsilon)$. Par le point précédent, on sait par exemple que $k = \sup_{s\in(t-\varepsilon,t+\varepsilon)} |f'(s)|$ fonctionne. Par arbitrarité de t, f est localement Lipschitz.