Série 12

L'objectif de cette série est de prouver le théorème suivant :

Theorème. Berestycki-Lions-Peletier(1981)
Soit $p > 1$. Il existe un nombre réel $\zeta > 0$ tel que la solution $u \in C^2(\mathbb{R}_+)$ du problème à valeur initiale

$$\begin{cases} -u'' - \dfrac{1}{r}u' = g(u) = \begin{cases} -u + u^p, & u \geq 0 \\ 0, & u < 0 \end{cases}, \\ u(0) = \zeta, u'(0) = 0 \end{cases}$$

a les propriétés que $u(r) > 0$ pour tout $r \in [0, +\infty)$, $u'(r) < 0$ pour tout $r \in (0, +\infty)$ et

$$\lim_{r \mapsto +\infty} u(r) = 0.$$

La preuve se divise en plusieurs étapes.

1. Pour toute valeur initiale $\zeta \in \mathbb{R}_+$, justifier l'existence et l'unicité d'une solution $u(\zeta, r)$ sur un intervalle d'existence maximal $[0, r_\zeta)$.

2. Prouver que pour toute valeur initiale $u(\zeta, 0) = \zeta \in (1, +\infty) =: I$, l'intervalle d'existence maximal est $[0, +\infty)$.
   Indice 1 : Utiliser le corollaire 3.1*, c'est-à-dire prouver que pour tout intervalle de la forme* $[0, R)$*,* $R > 0$*, la fonction* $u(\zeta, r)$ *est bornée.*
   Indice 2 : Définir la fonction $G(r) = \int_0^r g(s)ds$*, et prouver que pour tout* $r > \zeta$ *alors*
   $$G(u(\zeta, r)) \leq G(u(\zeta, 0)) = G(\zeta)$$
   à l'aide de l'EDO $-u''(r) - \dfrac{1}{r}u'(r) = g(u)$*. En déduire que* $u(\zeta, r) \leq \zeta$*. Pour la borne inférieure, utiliser la solution explicite de l'équation lorsque* $u \leq 0$*.*

3. Soit $\zeta_1 \in (0, +\infty)$. Montrer que si $u(\zeta_1, r) > 0$ pour tout $r \geq 0$ et si $u'(\zeta_1, r) < 0$ pour tout $r > 0$, alors $l = \lim_{r \mapsto +\infty} u(\zeta_1, r)$ satisfait
   $$g(l) = 0.$$
   De plus, montrer que $l \neq 1$, et en déduire que $l = 0$.
   Indice 1 : Pour la deuxième partie, procéder par contradiction. Définir $v(r) = \sqrt{r}[u(r) - 1]$*, montrer qu'il existe* $R_1 > 0$ *tel que* $v''(r) < 0$ *pour tout* $r \geq R_1$ *et que cela mène à une contradiction.*

4. Définissons les ensemble :
   $$\begin{aligned} P &= \{\zeta \in I; \exists r_0 = r_0(\zeta) > 0 \text{ t.q. } u'(\zeta, r_0) = 0 \text{ et } u(\zeta, r) > 0, \text{ pour } r \in [0, r_0]\} \\ N &= \{\zeta \in I; \exists r_0 = r_0(\zeta) > 0 \text{ t.q. } u(\zeta, r_0) = 0 \text{ et } u'(\zeta, r) < 0, \text{ pour } r \in (0, r_0]\} \end{aligned}.$$
   Prouver que ces ensemble sont égaux aux ensembles P et N définis au cours.
   Indice 1 : Utiliser l'exercice précédent.

La fin de la preuve, qui sera au programme de la semaine prochaine, consiste à montrer que les ensemble P et N sont non-vides, ouverts et disjoints. Cela montre que l'ensemble G défini en cours existe.
Solution :

1. En définissant $u_1 = u$ et $u_2 = u'$, on peut réécrire le problème comme un système d'ordre 1 :
$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} u_2 \\ -\frac{1}{r}u_2 - g(u_1) \end{pmatrix} =: f(r, u_1, u_2).$$
La fonction f est localement Lipschitizienne en u_1, u_2 et est continue sur $D := \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^2$. Le théorème de Picard assure alors l'existence et l'unicité sur un intervalle maximal $(0, r_\zeta)$, pour toute valeur initiale dans D.
Comme abordé en cours, la méthode pour montrer l'unicité sur $[0, r_\zeta)$ est plus complexe se base sur un argument de point fixe appliqué à l'équation intégrale équivalente. On montre à postériori que $u'(0) = 0$ et que la solution est bien définie sur $\mathbb{R}_+$.

2. Soit On montre que pour toute solution $u(\zeta, r)$ du problème associée aux valeurs initiales $u(\zeta, 0) = \zeta, u'(\zeta, 0) = 0$, l'intervalle maximal d'existence est $r_\zeta = [0, +\infty)$ si $\zeta \geq 1$. Pour ce faire, on montre que $u(\zeta, r)$ est borné sur tout intervalle $[0, R]$, pour tout $R > 0$. Par le corollaire 3.1, cela prouve que $u(\zeta, r)$ est défini sur $[0, R]$, et donc sur $[0, +\infty)$ par arbitrarité de R. En multipliant l'EDO initiale par $u'(\zeta, r)$ et en intégrant de chaque côté entre 0 et r, on obtient :
$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\left(u'(\zeta, r)\right)^2 + \frac{1}{2}\left(u'(\zeta, 0)\right)^2 - \int_0^r \frac{1}{s}(u'(\zeta, s))^2 ds &= \int_{u(\zeta,0)}^{u(\zeta,r)} g(s) ds \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\left(u'(\zeta, r)\right)^2 - \int_0^r \frac{1}{s}(u'(\zeta, s))^2 ds &= G(u(\zeta, r)) - G(\zeta) \\ \Leftrightarrow G(u(\zeta, r)) + \frac{1}{2}\left(u'(\zeta, r)\right)^2 + \int_0^r \frac{1}{s}(u'(\zeta, s))^2 ds &= G(\zeta). \end{aligned}$$
Cela implique que pour tout $r \in [0, R]$:
$$G(u(\zeta, r)) \leq G(\zeta) = G(u(\zeta, 0)).$$
De plus, comme $g(s) > 0$ pour tout $s \in I = (1, +\infty)$ et que
$$G(u(\zeta, r)) = G(\zeta) + \int_\zeta^{u(\zeta,r)} g(s) ds,$$
il faut que $u(\zeta, r) \leq \zeta$ pour que l'intégrale ait une contribution négative. On a donc une borne supérieure. Il reste à trouver une borne inférieure à $u(\zeta, r)$ pour tout $r \in [0, R]$. S'il existe $r_0 > 0$ tel que $u(\zeta, r_0) = 0$ et $u'(\zeta, r_0) < 0$ (le cas $u'(\zeta, r_0) = 0$ n'est pas possible par unicité de la solution et le fait que u n'est pas triviale), alors comme $g(s) = 0$ pour tout $s < 0$, l'EDO devient :
$$u''(\zeta, r) = -\frac{1}{r}u(\zeta, r).$$
On en déduit que $u'(\zeta, r) = c\frac{1}{r}$, avec c une constante réelle non nulle. Par conséquent :
$$u'(\zeta, r) = \left(\frac{r_0}{r}\right) u'(\zeta, r_0) \geq u'(\zeta, r_0)$$
car $u'(\zeta, r_0) < 0$. Cela finit la preuve et montre que l'intervalle d'existence maximal est $r_\zeta = [0, +\infty)$.

3. L'expression que nous avions précédemment trouvée :
$$\frac{1}{2}\left(u'(\zeta_1, r)\right)^2 + \int_0^r \frac{1}{s}(u'(\zeta_1, s))^2 ds = G(\zeta_1) - G(u(\zeta_1, r)),$$
implique que :
$$\int_0^r \frac{1}{s}(u'(\zeta_1, s))^2 ds < +\infty,$$
et donc $u'(\zeta_1, r)$ converge lorsque r tend vers l'infini. De plus, $u(\zeta_1, r)$ est borné donc $u'(\zeta_1, r)$ converge vers 0. De plus, l'EDO initiale montre que $u''(\zeta, r)$ converge, et comme $u'(\zeta_1, r)$ est borné, alors $u''(\zeta, r)$ converge vers 0. En faisant tendre r vers l'infini dans l'EDO initiale, cela prouve que

$g(l) = 0$.

Pour montrer que $l = \lim_{r\mapsto+\infty} u(\zeta_1, r)$ est différent de 1, procédons par l'absurde et introduisons la fonction auxiliaire :

$$v(r) = \sqrt{r}[u(r) - 1].$$

Alors :

$$\begin{aligned}
-v'' &= -\left(\frac{1}{2}r^{-1/2}(u-1) + r^{1/2}u'\right)' \\
&= -\left(-\frac{1}{4}r^{-3/2}(u-1) + r^{-1/2}u' + r^{1/2}u''\right) \\
&= -\left(-\frac{1}{4}r^{-3/2}(u-1) - r^{1/2}\left(-u'' - \frac{1}{r}u'\right)\right) \\
&= \frac{1}{4r^2}v + \frac{g(u)}{u-1}v \\
&= \left(\frac{g(u(r))}{u(r)-1} + \frac{1}{4r^2}\right)v(r).
\end{aligned}$$

Comme $v(r) > 0$ pour tout $r \geq 0$ (car la dérivée $u'(\zeta, r) < 0$, ce qui implique que $u(\zeta_1, r) \geq 1$) et que pour tout $u \geq 1$,$g(u) \geq 0$, alors $v'' < 0$ pour tout r. Cela implique que la limite $L = \lim_{r\mapsto+\infty} v'(r)$ satisfait $-\infty \leq L < +\infty$. Si $L < 0$ alors $v(r)$ converge vers $-\infty$, ce qui est impossible car $v(r) \geq 0$. Si $0 \leq L < +\infty$, il existe $R > 1$ tel que $0 < v(R) \leq v(r)$ pour tout $r > R$. De plus, par Bernoulli-L'Hospital :

$$\lim_{r\mapsto+\infty}\left(\frac{g(u)}{u-1} + \frac{1}{4r^2}\right) = \lim_{r\mapsto+\infty}\frac{g'(u)u'}{u'} = p - 1 > 0.$$

Par conséquent, il existe un $\tilde{R} > 1$ tel que pour tout $r > \tilde{R}$, alors

$$\left(\frac{g(u(r))}{u-1} + \frac{1}{4r^2}\right) > \frac{p-1}{2},$$

ce qui implique que pour tout $r > \max\{R, \tilde{R}\} =: \tilde{\tilde{R}}$:

$$-v''(r) = \left(\frac{g(u(r))}{u-1} + \frac{1}{4r^2}\right)v(r) > \frac{p-1}{2}v(r) \geq \frac{p-1}{2}v\left(\tilde{\tilde{R}}\right) > 0.$$

On en déduit que $v'(r)$ tend vers $-\infty$, ce qui est de nouveau une contradiction avec $0 \leq L$. De ce fait, $l \neq 1$ et comme les zéros de g sont en 0 et 1, $l = 0$.

4. Les défintions du cours sont :

$$\begin{aligned}
\tilde{N} &= \{\zeta \in I; \exists r > 0 \text{ t.q. } u(\zeta, r) = 0\} \\
G &= \{\zeta \in I; u(\zeta, r) > 0, \forall r > 0, \lim_{r\mapsto+\infty} u(\zeta, r) = 0\}. \\
\tilde{P} &= \{\zeta \in I; u(\zeta, r) > 0, \forall r > 0, \zeta \notin G\}
\end{aligned}$$

Supposons que $\tilde{P} \nsubseteq P$. Il existe alors $\zeta \in \tilde{P}$ tel que pour tout $r > 0$, $u'(\zeta, r) < 0$. Mais par l'exercice précédent, cela implique que $\lim_{r\mapsto+\infty} u(\zeta_1, r) = 0$, ce qui est une contradiction avec le fait que $\zeta \in \tilde{P}$. Donc $\tilde{P} \subset P$. Soit maintenant $\zeta \in P$, et montrons que $\zeta \in \tilde{P}$. Pour ce faire, nous allons montrer que ζ n'appartient ni à $\tilde{N}$ ni à G.

Supposons que $\zeta \in \tilde{N}$, et donc qu'il existe $\tilde{r} > 0$ tel que $u(\zeta, \tilde{r}) = 0$ ($\tilde{r}$ et égal au $z(\zeta)$ défini en cours). Par le lemme 12.3, $u'(\zeta, r) < 0$ pour tout $0 < r < \tilde{r}$. Mais la solution de l'exercice 2 montrait aussi que dans ce cas pour tout $r \geq \tilde{r}$ $u'(\zeta, r) = c\frac{1}{r}$, avec c une constante réelle négative. Cela prouve que pour tout $r > 0$ on a $u'(\zeta, r) \neq 0$, ce qui est une contradiction avec l'hypothèse $\zeta \in P$. Supposons maintenant que $\zeta \in G$. Alors dans ce cas la quantité $z(\zeta) = +\infty$ et le théorème 12.3 assure de nouveau que $u'(\zeta, r) < 0$ pour tout $0 < r < z(\zeta) = +\infty$, ce qui est de nouveau une contradiction avec $\zeta \in P$. Comme $I = \tilde{N} \cup G \cup \tilde{P}$ et que $= \tilde{N}, G$ et $\tilde{P}$ sont disjoints deux à deux, $\zeta \in \tilde{P}$ et $P \subset \tilde{P}$. Il est clair par les définitions que $N \subset \tilde{N}$, montrons donc que $\tilde{N} \subset N$. Supposons par l'absurde que $\tilde{N} \not\subseteq N$. Il existe alors $\zeta \in \tilde{N}$ et $r^* > 0$ tel que $u(\zeta, r^*) = 0$ et $u(\zeta, r) > 0$ pour tout $0 \leq r < r^*$, mais $u'(\zeta, \tilde{r}) \geq 0$ pour un certain $0 < \tilde{r} < r^*$. Par continuité de $u'(\zeta, r)$, cela force l'existence de $0 < \tilde{\tilde{r}} \leq \tilde{r}$ tel que $u'(\zeta, \tilde{\tilde{r}}) = 0$. Par conséquent, $\zeta \in P$. Mais comme l'on vient de prouver que $P \subset \tilde{P}$, cela mène à une contradiction car $\tilde{P}$ et $\tilde{N}$ sont disjoints. De ce fait, $\tilde{N} \subset N$ et donc $N = \tilde{N}$.