Série 11

1. Montrer que toute solution de l'équation

$$x'' + \frac{2t}{t^2+1}x = 0$$

possède au plus un zéro dans l'intervalle $[0, \pi]$.

Solution : Soit $x_1(t)$ une solution non-triviale de l'équation, et considérons la nouvelle EDO

$$y'' + y = 0.$$

Une solution est $x_2(t) = \sin(t)$. De plus, on a que $\frac{2t}{t^2+1} \leq 1$ car $t^2 - 2t + 1 = (t-1)^2 \geq 0$. Par conséquent, en posant $p_1(t) = p_2(t) = 1, q_1(t) = \frac{2t}{t^2+1}$ et $q_2(t) = 1$, $x_2(t)$ est un majorant de Sturm pour $x_1(t)$. Sur l'intervalle $[0, \pi]$, les seuls zéros sont 0 et π. Supposons par l'absurde que $x_1(t)$ a deux zéros distincts en $0 \leq t_1 < t_2 < \pi$. Alors le théorème de comparaison assure l'existence de $t^* \in (t_1, t_2]$ tel que $x_2(t^*) = 0$, ce qui est impossible comme $(t_1, t_2] \subset (0, \pi)$. Donc $x_1(t)$ a au plus un zéro sur $[0, \pi)$.

2. On considère l'équation

$$x'' + q(t)x = 0, \tag{1}$$

où $p \in C^0([0, \infty), \mathbb{R})$. Supposons qu'il existe $m_1, m_2 > 0$ tels que $m_1 \leqslant q(t) \leqslant m_2$ pour tout $t \geqslant 0$. Montrer que toute solution non-triviale de (1) possède un ensemble infini dénombrable de zéros consécutifs $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}_0} \subset [0, \infty)$ tels que

$$\frac{\pi}{\sqrt{m_2}} \leqslant t_{n+1} - t_n \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{m_1}}.$$

Solution : Comme les bornes $0 < m_1 \leqq (t) \leq m_2$ sont valides, on s'intéresse naturellement aux problèmes auxiliaires

$$x'' + m_1 x = 0 \text{ et } x'' + m_2 x = 0.$$

En posant $p(t) = p_1(t) = p_2(t) = 1, q_1(t) = m_1, q_2(t) = m_2, x(t)$ une solution du problème initial et $x_i(t)$ des solutions de $x'' + m_i x = 0, i = 1, 2$, on obtient que $x(t)$ est un majorant de Sturm de $x_1(t)$, et que $x_1(t)$ est un majorant de Sturm de $x_2(t)$. Une solution de $x'' + m_1 x = 0$ est $x_1(t) = \sin\left(\sqrt{m_1}t\right)$. Par le théorème de comparaison, $x(t)$ possède au moins un zéro dans tout l'intervalle de la forme $\left(\frac{k\pi}{\sqrt{m_1}}, \frac{(k+1)\pi}{\sqrt{m_1}}\right]$, car $x_1(t)$ s'annule en $\frac{k\pi}{\sqrt{m_1}}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. De plus, par le lemme 10.3, les zéros de $x(t)$ ne peuvent pas avoir de point d'accumulation. Par conséquent, les zéros de $x(t)$ sont un ensemble infini dénombrable $\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$ tels que $t_i < t_{i+1}$, pour tout $i \in \mathbb{N}$. On veut prouver maintenant que pour tout $i \in \mathbb{N}, t_{i+1} - t_i \leq \pi/\sqrt{m_1}$.

Supposons par l'absurde qu'il existe un $j \in \mathbb{N}$ tel que $t_{j+1} - t_j > \pi/\sqrt{m_1}$. Considérons la fonction auxiliaire

$$y_j(t) := \sin\left(\sqrt{m_1}(t - t_j)\right).$$

Alors $y_j(t)$ satisfait $y_j''(t) + m_1 y_j(t) = 0$, par conséquent $x(t)$ est un majorant de $y_j(t)$. De plus, $y_j(t_j) = y_j(t_j + \pi/\sqrt{m_1}) = 0$. De ce fait, par le théorème de comparaison, $x(t)$ admet au moins un zéro dans $(t_j, t_j + \pi/\sqrt{m_1}]$. Mais ceci contredit le fait que $x(t) \neq 0$ sur (t_j, t_{j+1}) car $t - t_j \leq \pi/\sqrt{m_1}$ pour tout $t \in (t_j, t_j + \pi/\sqrt{m_1}]$. Donc $t_{i+1} - t_i \leq \pi/\sqrt{m_1}$, pour tout $i \in \mathbb{N}$.

Supposons maintenant que pour un certain $j \in \mathbb{N}$, $t_{j+1} - t_j < \pi/\sqrt{m_2}$ et considérons la fonction

$$x_2(t) := \sin\left(\sqrt{m_2}(t - t_j)\right).$$

Comme précédemment, $x_2(t)$ est solution $x'' + m_2 x = 0$ et donc $x_2(t)$ est un majorant de Sturm de $x(t)$. Par conséquent, $x_2(t)$ admet un zéro sur l'intervalle $(t_j, t_{j+1}]$ par le théorème de comparaison. Mais

$$t_{j+1} < t_j + \pi/\sqrt{m_2},$$

ce qui n'est pas possible car les zéros de $x_2(t)$ supérieurs à t_j sont de la forme $t_j + (k\pi)/\sqrt{m_2}, k \in \mathbb{N}$. En définitive,

$$\frac{\pi}{\sqrt{m_2}} \leq t_{i+1} - t_i \leq \frac{\pi}{\sqrt{m_1}}, \forall i \in \mathbb{N}.$$

3. Prouver les théorèmes de comparaison suivants, sans utiliser la transformation de Prüfer.

<u>Théorème 1</u> : Pour $i = 1, 2$, soit $\phi_i(t)$ une solution non-triviale de

$$(p(t)x')' + q_i(t)x = 0$$

sur l'intervalle $[a, b)$, avec $p, q_i \in C^0([a, b), \mathbb{R})$, $p_i(t) > 0$ pour tout $t \in [a, b)$. On suppose que $q_1(t) < q_2(t)$ pour tout $t \in [a, b)$. Soit $t_1, t_2 \in [a, b)$ deux zéros consécutifs de ϕ_1. Alors il existe $\tilde{t} \in (t_1, t_2)$ tel que $\phi_2(\tilde{t}) = 0$.

<u>Théorème 2</u> : Pour $i = 1, 2$, soit $\phi_i(t)$ une solution non-triviale de

$$(p_i(t)x')' + q_i(t)x = 0$$

sur l'intervalle $[a, b)$, avec $p_i, q_i \in C^0([a, b), \mathbb{R})$, $p(t) > 0$ pour tout $t \in [a, b)$. On suppose que $p_1(t) \geqslant p_2(t)$ et $q_1(t) < q_2(t)$ pour tout $t \in [a, b)$. Soit $t_1, t_2 \in [a, b)$ deux zéros consécutifs de ϕ_1. Alors il existe $\tilde{t} \in (t_1, t_2)$ tel que $\phi_2(\tilde{t}) = 0$.

Indications : Pour le théorème 1, démontrer et utiliser l'*identité de Lagrange*

$$p(\phi_1'\phi_2 - \phi_1\phi_2')\big|_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} (q_2 - q_1)\phi_1\phi_2 \, \mathrm{d}t.$$

Pour le théorème 2, démontrer et utiliser l'*identité de Picone*

$$\frac{\phi_1}{\phi_2}\big(p_1\phi_1'\phi_2 - p_2\phi_1\phi_2'\big)\Big|_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} (q_2 - q_1)\phi_1^2 \, \mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2} (p_1 - p_2)(\phi_1')^2 \, \mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2} p_2 \frac{(\phi_1'\phi_2 - \phi_1\phi_2')^2}{\phi_2^2} \, \mathrm{d}t.$$

(Les cas $\phi_2(t_1) = 0$ ou $\phi_2(t_2) = 0$ se traitent en utilisant la formule de Bernoulli–L'Hospital pour donner un sens au membre de gauche.)

Remarque : Il est intéressant de comprendre pourquoi l'identité de Lagrange ne permet pas de conclure dans ce cas. **Solution** :

Théorème 1 : Commençons par prouver l'identité de Lagrange :

$$\begin{aligned}
p\left(\phi_1'\phi_2 - \phi_1\phi_2'\right)|_{t_1}^{t_2} &= \int_{t_1}^{t_2} \left(p\left(\phi_1'\phi_2 - \phi_1\phi_2'\right)\right)' dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(p\phi_1'\right)'\phi_2 + p\phi_1'\phi_2' - \phi_1\left(p\phi_2'\right)' - \phi_1'p\phi_2'\right] dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left(-q_1\phi_1\phi_2 + \phi_1 q_2\phi_2\right) dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left(q_2 - q_1\right)\phi_1\phi_2 dt
\end{aligned}$$

Si t_1 et t_2 sont des zéros consécutifs de ϕ_1, alors $\phi_1(t) \neq 0$ sur (t_1, t_2), donc sans perte de généralité on peut supposer que $\phi_1(t) > 0$ sur cet intervalle. Par unicité de la situation et le faire que ϕ_1 est une solution non-triviale, cela force $\phi_1'(t_1) > 0$ et $\phi_1'(t_2) < 0$. Par l'absurde, supposons que ϕ_2 n'ait pas des zéros sur (t_1, t_2). Alors :

- si $\phi_2 > 0$ pour tout $t \in (t_1, t_2)$, comme $q_2 - q_1 > 0, p > 0, \phi_1'(t_1) > 0$ et $\phi_1'(t_2) < 0$:

$$0 < \int_{t_1}^{t_2} (q_2 - q_1)\phi_1\phi_2 dt = p\left(\phi_1'\phi_2 - \phi_1\phi_2'\right)|_{t_1}^{t_2} = p(t_2)\phi_1'(t_2)\phi_2(t_2) - p(t_1)\phi_1'(t_1)\phi_2(t_1) \leq 0$$

- si $\phi_2 < 0$ pour tout $t \in (t_1, t_2)$, alors :

$$0 > \int_{t_1}^{t_2} (q_2 - q_1)\phi_1\phi_2 dt = p(t_2)\phi_1'(t_2)\phi_2(t_2) - p(t_1)\phi_1'(t_1)\phi_2(t_1) \geq 0$$

Dans les deux cas, cela mène à une contradiction, donc ϕ_2 admet un zéro dans (t_1, t_2). Si on avait supposé que $\phi_1 < 0$ sur (t_1, t_2), les inégalités auraient été dans le sens inverse mais la contradiction toujours valable.

Théorème 2 : Vérifions tout d'abord que la fonction

$$t \mapsto \frac{\phi_1(t)}{\phi_2(t)} \left(p_1(t)\phi_1'(t)\phi_2(t) - p_2(t)\phi_1(t)\phi_2'(t)\right)$$

est bien définie en t_1 et t_2. Si $\phi_2(t_i) = 0, i = 1, 2$, alors $\phi_2'(t_i) \neq 0$ par unicité de la solution, et que ϕ_2 est non-triviale par hypothèse. Par conséquent, comme $\phi_1(t_i) = 0$ et que ϕ_1, ϕ_2 est dérivable sur $[a, b)$:

$$\lim_{t \mapsto t_i} \left| \frac{\phi_1(t)}{\phi_2(t)} \right| = \left| \frac{\phi_1'(t_i)}{\phi_2'(t_i)} \right| < \infty,$$

ce qui implique que

$$\lim_{t \mapsto t_i} \frac{\phi_1(t)}{\phi_2(t)} \left(p_1(t)\phi_1'(t)\phi_2(t) - p_2(t)\phi_1(t)\phi_2'(t)\right) = 0.$$

Si l'on suppose que $\phi_2(t) \neq 0$ pour tout $t \in (t_1, t_2)$, le développement suivant est valide :

$$\begin{aligned}
0 =& \frac{\phi_1}{\phi_2} \left(p_1\phi_1'\phi_2 - p_2\phi_1\phi_2'\right) |_{t_1}^{t_2} \\
=& \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\phi_1}{\phi_2} \left(p_1\phi_1'\phi_2 - p_2\phi_1\phi_2'\right) |_{t_1}^{t_2} \right)' dt \\
=& \int_{t_1}^{t_2} \frac{\phi_1'\phi_2 - \phi_1\phi_2'}{\phi_2^2} \left(p_1\phi_1'\phi_2 - p_2\phi_1\phi_2'\right) + \frac{\phi_1}{\phi_2} \left(\left(p_1\phi_1'\right)'\phi_2 + p_1\phi_1'\phi_2' - \phi_1' p_2 \phi_2' - \phi_1 \left(p_2\phi_2'\right)' \right) dt \\
=& \int_{t_1}^{t_2} \frac{\phi_1'\phi_2 - \phi_1\phi_2'}{\phi_2^2} \left(p_1\phi_1'\phi_2 - p_2\phi_1\phi_2'\right) + \frac{\phi_1}{\phi_2} \left((q_2 - q_1)\phi_1\phi_2 + (p_1 - p_2)\phi_1'\phi_2'\right) dt \\
=& \int_{t_1}^{t_2} (q_2 - q_1)\phi_1^2 + \frac{1}{\phi_2^2} \left(p_1 \left(\phi_1'\phi_2\right)^2 + p_2 \left(\phi_1\phi_2'\right)^2 - 2p_2\phi_1\phi_2'\phi_1'\phi_2 \right) dt \\
=& \int_{t_1}^{t_2} (q_2 - q_1)\phi_1^2 + \frac{1}{\phi_2^2} \left((p_1 - p_2) \left(\phi_1'\phi_2\right)^2 + p_2 \left(\phi_1'\phi_2\right)^2 + p_2 \left(\phi_1\phi_2'\right)^2 - 2p_2\phi_1\phi_2'\phi_1'\phi_2 \right) dt \\
=& \int_{t_1}^{t_2} (q_2 - q_1)\phi_1^2 + (p_1 - p_2) \left(\phi_1'\right)^2 + \frac{p_2}{\phi_2^2} \left(\phi_1\phi_2' - \phi_1'\phi_2\right)^2 dt
\end{aligned}$$

C'est une contradiction, car le dernier terme est strictement positif. Donc ϕ_2 admet un zéro dans (t_1, t_2).