Série 10

1. On considère les équations du deuxième ordre

$$x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = f(t), \tag{1}$$

$$(p(t)x')' + q(t)x = h(t), \tag{2}$$

$$x'' + \tilde{q}(t)x = \tilde{h}(t), \tag{3}$$

où tous les coefficients sont supposés continus sur un intervalle (a, b) (borné ou non), avec la condition $p(t) > 0$ pour tout $t \in (a, b)$.

(a) Montrer que (1) peut toujours s'écrire sous la forme (2).

(b) Trouver le changement de variables permettant d'écrire (2) sous la forme (3), tout en déterminant sous quelles conditions cette ré-écriture est légitime.

Solution :

(a) Soit $x(t)$ solution de l'équation (1). On veut montrer qu'il existe $p \in C^1((a, b)), q \in C^0((a, b))$ avec $p(t) > 0$ pour tout $t \in (a, b)$ tels que :

$$x'' + a_1x' + a_2x = f \Leftrightarrow (px')' + qx = h.$$

En multipliant l'équation initiale par p, on obtient :

$$px'' + pa_1x + pa_2x = pf,$$

ce qui force $p' = pa_1$. Cela qui mène à définir :

$$p(t) = \mathrm{e}^{\int_{t_0}^t a_1(s)ds}, q(t) = p(t)a_2(t) \text{ et } h(t) = q(t)f(t),$$

avec $t_0 \in (a, b)$. Comme $p(t) > 0$ pour tout $t \in (a, b)$, alors l'équivalence est bien valide, car p est inversible.

(b) On cherche un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et un difféomorphisme $\phi : I \to (a, b)$ tels que si $y(s) := x(\phi(s))$, alors :

$$\big(p(t)x'(t)\big)' + q(t)x(t) = h(t) \Leftrightarrow y''(s) + \tilde{q}(s)x(s) = \tilde{h}(s),$$

où $t = \phi(s)$. Pour ce faire, on aimerait que :

$$y'(s) = x'(\phi(s))p(\phi(s)) = x'(t)p(t),$$

c'est à dire avec la définition de y :

$$\begin{aligned} x'(\phi(s))\phi'(s) = x'(\phi(s))p(\phi(s)) &\Rightarrow \phi'(s) = p(\phi(s)) \\ &\Rightarrow \int_{s_0}^s \frac{\phi'(u)}{p(\phi(u))}du = \int_{s_0}^s 1du \\ &\Leftrightarrow \int_{\phi(s_0)}^{\phi(s)} \frac{1}{p(v)}dv = s - s_0. \end{aligned}$$

Cela mène à définir la fonction $\psi : (a, b) \to \mathbb{R}, \psi(t) \mapsto \int_{t_0}^t \dfrac{1}{p(u)}du$, qui est strictement croissante et inversible. Soit donc $\phi : (\psi(a), \psi(b)) \to (a, b)$ tel que $\phi(s) := \psi^{-1}(s)$. Cette fonction satisfait bien la condition désirée :

$$\phi'(s) = \frac{d}{ds}\left(\psi^{-1}(s)\right) = \frac{1}{\psi'\left(\psi^{-1}(s)\right)} = \frac{1}{\psi'\left(\phi(s)\right)} = p\left(\phi(s)\right) = p(t).$$

Dès lors, on a que :

$$\begin{aligned}
y''(s) &= \frac{d^2}{ds^2}\left(x(\phi(s))\right) \\
&= \frac{d}{ds}\left(x'(\phi(s))\phi'(s)\right) \\
&= x''(\phi(s))\left(\phi'(s)\right)^2 + x'(\phi(s))\frac{d}{ds}\left(\phi'(s)\right) \\
&= x''(\phi(s))(p(\phi(s)))^2 + x'(\phi(s))\frac{d}{ds}\left(p(\phi(s))\right) \\
&= x''(t)p^2(t) + x'(t)p'(t)p(t) \\
&= (p(t)x'(t))'p(t),
\end{aligned}$$

et donc en posant $\tilde{q}(s) := p(\phi(s))q(\phi(s))$ et $\tilde{h}(s) := p(\phi(s))h(\phi(s))$:

$$y''(s) + \tilde{q}(s)y(s) = \tilde{h}(s) \Leftrightarrow \left(p(t)x'(t)\right)' + q(t)x(t) = h(t),$$

ce qui est le résultat voulu.

2. Soit $\phi(t)$ une solution non-triviale de l'équation homogène

$$(p(t)x')' + q(t)x = 0 \tag{4}$$

sur l'intervalle (a, b), où les coefficients sont supposés continus, avec $p > 0$. Montrer que, pour tout intervalle compact $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$, ϕ possède au plus un nombre fini de zéros sur $[\alpha, \beta]$.
Solution : La preuve est la même que celle présentée dans le lemme 10.3 du cours. Pour rappel, l'idée est qu'en procédant par contradiction on peut supposer l'existence d'une solution non-triviale ϕ et d'une suite croissante $\{t_m\}_{m=0}^{\infty} \subset (a, b)$ de zéros tels que $\lim_{m\mapsto\infty} t_m = t^* \in [\alpha, \beta]$. Alors, par le théorème de Rolle, cela implique que $p(t^*)\phi'(t^*) = 0$ et donc que ϕ est l'unique solution du problème avec condition initiale $\phi(t^*) = 0$ et $(p\phi')(t^*) = 0$. Par unicité, cela implique que $\phi \equiv 0$, ce qui contredit l'hypothèse que la solution est non-triviale. Par conséquent, il y a un nombre fini de zéro sur $[\alpha, \beta]$.

3. Soit $\phi_1(t), \phi_2(t)$ deux solutions de l'équation homogène (4) sur (a, b). En récrivant (4) comme un système d'ordre 1, montrer que le Wronskien de ϕ_1 et ϕ_2 s'écrit

$$W(t) = p(t)[\phi_1(t)\phi_2'(t) - \phi_1'(t)\phi_2(t)],$$

et qu'il satisfait $W'(t) = 0$ pour tout $t \in (a, b)$.
Solution : L'équation homogène est

$$(px')' + qx = 0,$$

ce qui se réécrit, en définissant $x_1 = x$ et $x_2 = px'$, comme le système :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1/p \\ -q & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Si ϕ_1 et ϕ_2 sont deux solutions de l'équation homogène, alors $\begin{pmatrix} \phi_i \\ p\phi_i' \end{pmatrix}$ sont deux solutions du système. En effet :

$$\begin{pmatrix} \phi_i \\ p\phi_i' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{p}\,(p\phi_i') \\ -q\phi_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/p \\ -q & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_i \\ p\phi_i' \end{pmatrix}.$$

Le Wronskien est donc $W = \det\left(\begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ p\phi_1' & p\phi_2' \end{pmatrix}\right) = p(t)\left(\phi_1(t)\phi_2'(t) - \phi_1'(t)\phi_2(t)\right)$. On calcule alors, pour tout $t \in (a,b)$, que :

$$\begin{aligned} W'(t) &= \phi_1'(t)p(t)\phi_2'(t) + \phi_1(t)\left(p(t)\phi_2'(t)\right)' - \phi_2(t)\left(p(t)\phi_1'(t)\right)' - \phi_2'(t)p(t)\phi_1'(t) \\ &= \phi_1'(t)p(t)\phi_2'(t) - \phi_1(t)q(t)\phi_2(t) + \phi_2(t)q(t)\phi_1(t) - \phi_2'(t)p(t)\phi_1'(t) \\ &= 0. \end{aligned}$$

4. Soit $\phi(t)$ une solution de (4) sur (a,b) telle que $\phi(t) \neq 0$ pour tout $t \in (a,b)$. Soit $t_0 \in (a,b)$. Montrer que la solution générale de (4) est donnée par

$$x(t) = c_1\phi(t) + c_2\phi(t)\int_{t_0}^t \frac{\mathrm{d}s}{p(s)\phi(s)^2}, \qquad t \in (a,b).$$

Solution : Soit ψ une autre solution du problème homogène linéairement indépendante de ϕ. Alors, par l'exercice précédent :

$$p(t)\left(\phi(t)\psi'(t) - \phi'(t)\psi(t)\right) = c \neq 0,$$

pour une certaine constante réelle $c \in \mathbb{R}$. En utilisant le fait que $\phi(t) \neq 0$ pour tout $t \in (a,b)$, on réécrit :

$$\frac{\phi(t)\psi'(t) - \phi'(t)\psi(t)}{\phi^2(t)} = \frac{c}{\phi^2(t)p(t)}.$$

En intégrant de chaque côté, on trouve :

$$\int_{t_0}^t \left(\frac{\psi(s)}{\phi(s)}\right)' ds = c\int_{t_0}^t \frac{1}{\phi^2(s)p(s)} ds,$$

ce qui implique que

$$\psi(t) = c\phi(t)\int_{t_0}^t \frac{1}{\phi^2(s)p(s)} ds + d,$$

où d est une autre constante réelle. Comme $c \neq 0$, ces deux solutions sont bien linéairement indépendantes car $W(t) = c \neq 0$, pour tout $t \in (a,b)$. La solution générale est donc de la forme :

$$x(t) = c_1\phi(t) + c_2\phi(t)\int_{t_0}^t \frac{1}{\phi^2(s)p(s)} ds,$$

avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

5. On considère maintenant (4) sur $[a,b)$ avec $-\infty < a < b \leqslant \infty$ et $p, q \in C^0([a,b),\mathbb{R})$. Etant donné une solution $x(t)$ non-triviale, on définit le rayon de Prüfer $r(t)$ et l'angle de Prüfer $\theta(t)$ par

$$r^2(t) = x^2(t) + (px')^2(t), \qquad r(t) > 0,$$

et

$$\tan\theta(t) = \frac{x(t)}{(px')(t)}, \qquad \theta(a) \in [0,\pi),$$

où l'on rappelle que $x(t)$ et $(px')(t)$ ne peuvent s'annuler simultanément. Montrer que les fonctions $r, \theta \in C^1([a,b),\mathbb{R})$ et satisfont

$$r' = \left(\frac{1}{p(t)} - q(t)\right) r\sin\theta\cos\theta, \qquad \theta' = \frac{1}{p(t)}\cos^2\theta + q(t)\sin^2\theta.$$

Solution : On commence par faire les observations suivantes : si $\tan(\theta(t)) = 0$, alors $x(t) = 0$. Avec la définition du rayon de Prüfer, on en déduit que

$$\sin(\theta(t)) = \frac{x(t)}{r(t)} \text{ et } \cos(\theta(t)) = \frac{p(t)x'(t)}{r(t)}.$$

On fait alors les développements suivants, grâce aux expressions trouvées pour x et x' ci-dessus :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(r^2\right) &= rr' \\ &= xx' - px'qx \\ &= \frac{r^2\sin(\theta)\cos(\theta)}{p} - r^2\sin(\theta)\cos(\theta)q \\ &= r^2\sin(\theta)\cos(\theta)\left(\frac{1}{p} - q\right).\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\tan(\theta)\right) &= \frac{\theta'}{\cos^2(\theta)} \\ &= \frac{r^2\cos^2(\theta)}{p} + r^2\sin^2(\theta)q \\ &= \frac{1}{\cos^2(\theta)}\left(\frac{1}{p}\cos^2(\theta) + q\sin^2(\theta)\right).\end{aligned}$$

On en déduit les identités suivantes :

$$r' = r\sin(\theta)\cos(\theta)\left(\frac{1}{p} - q\right), \theta' = \frac{1}{p}\cos^2(\theta) + q\sin^2(\theta).$$

On sait que x, px' sont $C^1((a,b))$,que p, q sont $C^0((a,b))$ et que $p > 0$. Par conséquent, $r = \sqrt{x^2 + (px')^2}$ est $C^1((a,b))$. La fonction

$$\theta(t) = \arctan\left(\frac{x(t)}{p(t)x'(t)}\right)$$

est continue, car composée de fonctions continues. De plus, l'expression trouvée pour θ' montre qu'elle aussi est continue, donc $\theta \in C^1((a,b))$.