Alexandre Caboussat

Série 9

Exercice 1

On considère le problème suivant. Trouver $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} -u''(x) = 2 \quad \forall x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

1.a) Vérifier que la solution u est donnée par $u(x) = x(1-x)$.

1.b) Écrire la formulation variationnelle correspondante.

1.c) On note $h = \frac{1}{3}$, $x_i = ih$, $i = 0, 1, 2, 3$ et on considère la méthode d'éléments finis de degré un. Expliciter et résoudre le système linéaire

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix},$$

où u_1, u_2 sont des approximations de $u(x_1)$ et $u(x_2)$ respectivement. Montrer que $u(x_i) = u_i$, $i = 1, 2$.

1.d) Comparer le schéma obtenu avec le schéma correspondant à la méthode de différences finies centrées.

Exercice 2

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue donnée. On considère le problème aux limites suivant. Trouver une fonction $u : x \in [0,1] \to u(x) \in \mathbb{R}$, telle que

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) \quad \forall x \in (0,1), \\ u'(0) = 0, \\ u(1) = 0. \end{cases}$$

On veut résoudre numériquement ce problème par une méthode d'éléments finis de degré un.

2.a) Soit V l'ensemble des fonctions continues $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, de première dérivée g' continue par morceaux, et telles que $g(1) = 0$. Montrer que la formulation faible du problème consiste à trouver $u \in V$ telle que :

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx, \quad \forall v \in V.$$

2.b) On considère une méthode d'éléments finis continus de degré 1 pour résoudre ce problème. Pour ceci, posons N un entier positif, $h = \frac{1}{N+1}$ et $x_j = jh$ avec $j = 0, 1, 2, ..., (N+1)$. Les fonctions "*chapeaux*" φ_j de la base d'éléments finis associées aux points x_j, $j = 1, ..., N$, sont données par :

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{j-1}}{h} & \text{si } x \in [x_{j-1}, x_j], \\ \dfrac{x_{j+1} - x}{h} & \text{si } x \in [x_j, x_{j+1}], \\ 0 & \text{si } x < x_{j-1} \text{ ou } x > x_{j+1}. \end{cases}$$

La fonction φ_0 associée au point x_0 est donnée par

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \dfrac{x_1 - x}{h} & \text{si } x \in [x_0, x_1], \\ 0 & \text{si } x > x_1 \end{cases}$$

Représenter graphiquement les fonctions de base. Ecrire l'approximation de Galerkin correspondante, avec les fonctions φ_i comme fonctions de base, puis le système linéaire équivalent:

$$A\vec{u} = \vec{f}.$$

Expliciter les coefficients de A et $\vec{f}$ (sans évaluer les intégrales).

2.c) On utilise la formule du trapèze pour évaluer les intégrales présentes dans les coefficients du second membre $\vec{f}$. Le système ainsi obtenu sera noté

$$A\vec{\tilde{u}} = \vec{\tilde{f}}.$$

Calculer les coefficients de la matrice A et du second membre $\vec{\tilde{f}}$. Montrer qu'on aboutit au système linéaire

$$\frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{pmatrix}.$$

Expliciter α.

2.d) On veut résoudre le problème par la méthode de différences finies centrées. Ecrire le schéma pour les indices $i = 1, \ldots, N$. Pour l'indice $i = 0$ on utilise les deux formules de différences finies suivantes:

$$\frac{u_1 - u_{-1}}{2h} = 0,$$
$$\frac{-u_{-1} + 2u_0 - u_1}{h^2} = f(x_0).$$

Eliminer u_{-1} et écrire le système linéaire correspondant. Comparer avec le système obtenu avec la méthode des éléments finis obtenu par la méthode des éléments finis.

Exercice 3

On considère le problème différentiel aux limites suivant. Trouver une fonction $u : x \in [0,1] \to u(x) \in \mathbb{R}$, telle que

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\left((1+x)\dfrac{d}{dx}u(x)\right) = \sin(x) & \forall x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

On veut résoudre numériquement ce problème par une méthode d'éléments finis de degré un.

3.a) Soit V l'ensemble des fonctions continues $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, de première dérivée g' continue par morceaux et telles que $g(0) = g(1) = 0$. Montrer que la formulation faible du problème consiste à trouver $u \in V$ telle que :

$$\int_0^1 (1+x)u'(x)v'(x)dx = \int_0^1 \sin(x)v(x)dx, \quad \forall v \in V.$$

3.b) Soient $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_N(x)$ des fonctions linéairement indépendantes de V et V_h le sous-espace engendré par $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_N(x)$. Ecrire l'approximation de Galerkin puis le système linéaire équivalent :

$$A\vec{u} = \vec{f}.$$

Expliciter (sans évaluer les intégrales) les coefficients de la matrice A et du second membre $\vec{f}$.

3.c) On considère une méthode d'éléments finis continus de degré 1. Expliciter les coefficients de A et $\vec{f}$ (sans évaluer les intégrales) et remarquer que la matrice A est tridiagonale.

3.d) On utilise la formule des trapèzes pour évaluer les intégrales présentes dans les coefficients de la matrice A et du second membre $\mathbf{f}$. Le système obtenu après calcul des coefficients par la formule des trapèzes sera noté

$$\tilde{A}\vec{\tilde{u}} = \vec{\tilde{f}}.$$

Calculer les coefficients de la matrice $\tilde{A}$ et du second membre $\vec{\tilde{f}}$.