Alexandre Caboussat

Série 8

Exercice 1

Soit $f : x \in [0,1] \to f(x) \in \mathbb{R}$ une fonction continue donnée. On considère le problème aux limites suivant. Trouver une fonction $u : x \in [0,1] \to u(x) \in \mathbb{R}$, telle que

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\left((2+\sin(x))\dfrac{d}{dx}u(x)\right) = f(x) \quad \forall x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Pour tout entier N strictement positif, divisons l'intervalle $[0,1]$ en $(N+1)$ parties de longueur $h = 1/(N+1)$, notons $x_j = jh$, $j = 0,1,...,N+1$ et u_j une approximation de $u(x_j)$, $j = 0,1,...,N+1$. Proposer un schéma basé sur une formule de différences finies centrées pour résoudre ce problème. Ecrire le système linéaire correspondant.

Indication : Poser $v(x) = (2+\sin(x))\dfrac{du}{dx}(x)$ et approcher $\dfrac{dv}{dx}(x)$.

Exercice 2

On considère le problème suivant. Trouver une fonction $u : x \in [0,1] \to u(x) \in \mathbb{R}$, telle que

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) \quad \forall x \in (0,1), \\ u(0) = 0, \\ u'(1) + u(1) = 5. \end{cases}$$

Proposer un schéma basé sur une formule de différences finies centrées pour résoudre ce problème. Ecrire le système linéaire correspondant.

Indication : Ecrire le schéma pour les indices $j = 1, \ldots, N+1$, puis chercher une relation entre u_N, u_{N+1} et u_{N+2} pour tenir compte de la condition $u'(1)+u(1) = 5$. Cette condition s'appelle *condition de Robin*.

Exercice 3

On considère le problème aux limites non linéaire suivant. Etant donné une fonction $f : x \in (0,1) \to f(x) \in \mathbb{R}$, trouver une fonction $u : x \in (0,1) \to u(x) \in \mathbb{R}$, telle que

$$\begin{cases} -u''(x) + (1+x)u(x) + xe^{u(x)} = f(x) \qquad \forall x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

On se propose de résoudre numériquement ce problème par une méthode de différences finies centrées. Soit N un entier positif. On pose $h = \frac{1}{N+1}$, $x_j = jh$ et l'on note u_j l'approximation de u au point x_j, $j = 0, 1, 2, ..., (N+1)$.

3.a) Proposer un schéma de différences finies centrées pour résoudre numériquement ce problème. Spécifier le domaine de validité des indices et préciser les conditions aux limites. Soit $\vec{u}$ le N-vecteur de composantes $u_1, u_2, ..., u_N$. Écrire le schéma sous la forme

$$\vec{F}(\vec{u}) = \vec{0},$$

où $\vec{F}$ est une fonction de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$.

3.b) On se propose de résoudre le système d'équations non linéaire $\vec{F}(\vec{u}) = \vec{0}$ par la méthode de Newton. Calculer la matrice jacobienne

$$D\vec{F}(\vec{v}),$$

où $\vec{v}$ est un N-vecteur. Montrer que cette matrice est symétrique définie positive.

3.c) Le fichier `diffinies.m` est à votre disposition sur `Noto/Moodle`. A partir de la donnée de la fonction f et l'entier N, le programme `diffinies.m` permet de résoudre le système non linéaire $\vec{F}(\vec{u}) = \vec{0}$ en utilisant la méthode de Newton:

$$D\vec{F}(\vec{u}^n)(\vec{u}^n - \vec{u}^{n+1}) = \vec{F}(\vec{u}^n),$$

et la décomposition LL^T de la matrice jacobienne. Compléter le fichier.

3.d) On considère le cas où la fonction f est définie par $f(x) = 2 + x(1 - x^2 + e^{x(1-x)})$. Vérifier que la solution est donnée par $u(x) = x(1-x)$. Exécuter l'algorithme et vérifier que la solution approchée coïncide avec la solution exacte, i.e. $u_i = u(x_i)$, $i = 1, 2, .., N$.

3.e) On considère le cas où la fonction f est définie par $f(x) = \sin(2\pi x)(1 + 4\pi^2 + x) + xe^{\sin(2\pi x)}$. Vérifier que la solution est donnée par $u(x) = \sin(2\pi x)$. Exécuter l'algorithme et vérifier que l'erreur

$$\max_{1 \le i \le N} |u(x_i) - u_i|$$

est approximativement divisée par 4 chaque fois que h est divisé par 2.