Série 7

Exercice 1

On considère le système différentiel suivant: trouver deux fonctions $u_1, u_2 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ telles que

$$\begin{cases} \dot{u}_1(t) + 2u_1(t) - u_2(t) + \big(1 + \cos u_1(t)\big)e^{u_1(t)} = 1, & t > 0, \\ \dot{u}_2(t) + 2u_2(t) - u_1(t) + \big(1 + \cos u_2(t)\big)e^{u_2(t)} = 1, & t > 0, \\ u_1(0) = 0,\ u_2(0) = 0. \end{cases}$$

Soit $h > 0$ le pas de temps, on note $t_n = nh$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Soit u_1^n,u_2^n les approximations de $u_1(t_n)$, $u_2(t_n)$.

1.a) Ecrire le schéma d'Euler progressif correspondant à ce système. Calculer u_1^1 et u_2^1.

1.b) Ecrire le schéma d'Euler rétrograde correspondant à ce système. Effectuer un pas de la méthode de Newton pour approcher u_1^1 et u_2^1.

Exercice 2

On considère le problème de Cauchy: étant donné $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ et $u_0 \in \mathbb{R}$, trouver $u : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = f\big(u(t), t\big), & t > 0, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Soit $h > 0$ le pas de temps, on note $t_n = nh$, $n = 0, 1, 2, ...$, u^n une approximation de $u(t_n)$.

On considère le schéma suivant:

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{h} = f\left(u^n + \frac{h}{2} f\left(u^n, t_n\right)\ ,\ t_n + \frac{h}{2}\right).$$

2.a) Justifier le schéma ci-dessus et déterminer son ordre de consistance.

Indication: écrire l'équation différentielle: pour $t = t_{n+1/2}$, approcher la dérivée $\dot{u}(t)$ par une formule aux différences centrées, et puis utiliser le développement du Taylor pour approcher $f\big(u(t_{n+1/2}), t_{n+1/2}\big)$ dans le second membre.

2.b) On considère le cas où $f(x, t) = -\beta x$ avec $\beta > 0$. Sous quelle condition a-t-on

$$\lim_{n\to\infty} u^n = 0$$

pour tout $u_0 \in \mathbb{R}$?

Indication: écrire $|u^n| = \alpha^n |u_0|$ pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 3

Soit N un entier positif et $\alpha = (N+1)^2$, on considère pour $t > 0$ le système différentiel suivant :

$$\begin{aligned}
&\dot{u}_1(t) + \alpha\Big(2u_1(t) - u_2(t)\Big) = 0,\\
&\dot{u}_2(t) + \alpha\Big(-u_1(t) + 2u_2(t) - u_3(t)\Big) = 0,\\
&\vdots\\
&\dot{u}_{N-1}(t) + \alpha\Big(-u_{N-2}(t) + 2u_{N-1}(t) - u_N(t)\Big) = 0,\\
&\dot{u}_N(t) + \alpha\Big(-u_{N-1}(t) + 2u_N(t)\Big) = 0,
\end{aligned}$$

avec comme condition initiale $u_1(0) = 1$, $u_2(0) = 1$, …, $u_N(0) = 1$. On notera $\vec{u}(t)$ le N-vecteur de composantes $u_i(t)$, $h > 0$ le pas de temps, $t_n = nh$, $\vec{u}^n$ une approximation de $\vec{u}(t_n)$, $n = 0, 1, \ldots, M$.

3.a) Ecrire ce système différentiel sous la forme

$$\dot{\vec{u}}(t) + A\vec{u}(t) = 0,$$

expliciter la matrice A.

3.b) Le fichier `eqdiff1.m` est à votre disposition sur `Noto`/`Moodle`. Le programme `eqdiff1.m` permet de résoudre le système différentiel en utilisant le **schéma d'Euler progressif.** Compléter le fichier.

3.c) Le fichier `eqdiff2.m` est à votre disposition sur `Noto`/`Moodle`. Le programme `eqdiff2.m` permet de résoudre le système différentiel en utilisant le **schéma d'Euler rétrograde.** Compléter le fichier. [Noter le caractère implicite du schéma et observer qu'il nécessite la résolution du système linéaire $(I+hA)\vec{u}^{n+1} = \vec{u}^n$ à chaque pas de temps.]

Exercice 4

On considère le schéma de Newmark pour résoudre l'équation différentielle du 2$^{\text{e}}$ ordre

$$\begin{cases}
\ddot{u}(t) &= -\lambda u(t) \qquad t > 0,\\
u(0) &= u_0,\\
\dot{u}(0) &= 0,
\end{cases}$$

où $\lambda > 0$. Soit $t_n = nh$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, on note u^n une approximation de $u(t_n)$. On pose $u^0 = u_0$, $u^1 = \left(1 - \frac{\lambda h^2}{2}\right) u_0$. Pour $n = 1, 2, \ldots$, étant donné u^{n-1} et u^n, u^{n+1} est calculé à l'aide du schéma suivant

$$\frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{h^2} = -\lambda u^n.$$

4.a) Vérifier que la solution du système différentiel est donnée par $u(t) = u_0 \cos\left(\sqrt{\lambda} t\right)$. En déduire que $|u(t)| \leqslant |u_0| \quad \forall t \geqslant 0$.

4.b) Justifier le schéma de Newmark pour la discrétisation de l'équation différentielle et de la condition de bords. Quel est l'ordre de consistance du schéma?