 Alexandre Caboussat

Série 5

Exercice 1

On considère la méthode de Gauss-Seidel pour résoudre le système linéaire

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & -1 & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{N-1} \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1.a) Le fichier `gaussseidel.m` est à votre disposition sur `Noto/Moodle`. À partir de la donnée de N le programme `gaussseidel.m` permet de résoudre ce système linéaire tridiagonal. Compléter le fichier.

1.b) Exécuter le fichier avec $N = 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64$. Vérifier que le nombre d'itérations est multiplié par au moins 2 chaque fois que N est multiplié par 2 et en déduire que le nombre d'opérations est au moins $O(N^2)$.

Exercice 2

On considère le système linéaire suivant: trouver $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On pose $x_1^0 = x_2^0 = 0$ et on considère la méthode de Jacobi qui permet, pour $n = 0, 1, 2, \dots,$ de calculer x_1^{n+1} et x_2^{n+1} à partir de x_1^n et x_2^n.

2.a) Montrer que la suite $(x_2^n)_{n=0}^{\infty}$ définie par la méthode de Jacobi satisfait une relation de récurrence du type

$$x_2^{n+1} = \alpha x_2^{n-1} + \beta$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sont des constantes à définir.

2.b) Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} x_2^n = x_2$$

Exercice 3

On considère le système linéaire suivant: trouver $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3.a) Soit $\vec{x}^0 = \vec{0}$. Effectuer un pas de la méthode de la plus grande pente (méthode du gradient) pour calculer $\vec{x}^1$. Que peut-on observer?

Exercice 4

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

4.a) Montrer que la matrice G_ω de la méthode itérative de relaxation est donnée par

$$G_\omega = \begin{pmatrix} 1-\omega & \dfrac{\omega}{2} \\ \dfrac{\omega}{2}(1-\omega) & 1-\omega+\dfrac{\omega^2}{4} \end{pmatrix}.$$

4.b) Soit J la matrice de Jacobi. Montrer que $\rho(J) = 1/2$. En déduire que le coefficient de relaxation optimal ω_{opt} vaut $\omega_{opt} = 8 - 4\sqrt{3}$.