Série 4

Exercice 1

Soient $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux N-vecteurs donnés de composantes $(a_i)_{i=1}^N$ et $(b_i)_{i=1}^N$ respectivement, ainsi que $\vec{c}$ un $(N-1)$-vecteur donné de composantes $(c_i)_{i=1}^{N-1}$. On considère la $N \times N$-matrice A définie par

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & c_1 & & \\ c_1 & a_2 & \ddots & 0 \\ & \ddots & \ddots & c_{N-1} \\ 0 & & c_{N-1} & a_N \end{bmatrix}.$$

On suppose que la matrice A est symétrique définie positive et on veut résoudre le système $A\vec{x} = \vec{b}$ au moyen de la décomposition de Cholesky $A = LL^T$.

1.a) Le fichier `chol1.m` est à votre disposition sur `Noto`/`Moodle`. À partir de la donnée de N le programme `chol1.m` permet d'effectuer la décomposition de Cholesky d'une matrice tridiagonale dans le cas

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (2, 2, \ldots, 2)^T \in \mathbb{R}^N, \\ \vec{b} &= (1, 1, \ldots, 1)^T \in \mathbb{R}^N, \\ \vec{c} &= (-1, -1, \ldots, -1)^T \in \mathbb{R}^{N-1} \end{aligned}$$

en utilisant la structure particulière de la matrice A. Compléter le fichier `chol1.m`.

Exercice 2

Soient a, c et d trois nombres réels donnés et soit $\vec{b}$ un N-vecteur donné de composantes $(b_i)_{i=1}^N$. On considère la $N \times N$-matrice A définie par

$$A = \begin{bmatrix} a & d & & & \\ & a & d & 0 & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & a & d \\ c & c & \ldots & c & c \end{bmatrix}.$$

2.a) On suppose que A est régulière et que $a \neq 0$. Montrer toutes les sous-matrices principales de A sont régulières.

[Note: Ceci permet de conclure qu'il existe de façon unique deux matrices L (triangulaire inférieure) et U (triangulaire supérieure avec des 1 dans la diagonale) telles que $A = LU$.]

2.b) Vérifier que les matrices L et U ont l'allure suivante :

$$L = \begin{bmatrix} a & & & & \\ & a & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & a & \\ m_1 & m_2 & \dots & m_{N-1} & m_N \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & u & & & \\ & 1 & u & 0 & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & 1 & u \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

où $\vec{m}$ est un N-vecteur et u est un nombre qu'il faudra déterminer.

2.c) Ecrire un algorithme de décomposition $A = LU$ et de résolution du système linéaire $A\vec{x} = \vec{b}$, en complétant le code suivant:

Entrées / Sorties :

Entrées : a, d, c et $\vec{b}$.
Sorties : le N-vecteur $\vec{m}$ pour décrire L,
la solution $\vec{x}$ de $A\vec{x} = \vec{b}$est stockée dans le vecteur $\vec{b}$.

Décomposition LU **:**

$m_1 := c$

$d := \dfrac{d}{a}$

Faire $\quad i = 2 \quad$ à $\quad N$
$\qquad m_i :=????$

Résolution (d'abord $L\vec{y} = \vec{b}$**, puis** $U\vec{x} = \vec{y}$**) :**

Faire $\quad i = 1 \quad$ à $\quad (N-1)$
$\qquad b_i :=????$
$\qquad b_N :=????$

$b_N :=????$

puis

Faire $\quad i = (N-1) \quad$ à $\quad 1 \quad$ (pas de $\;-1$)
$\qquad b_i := b_i-????$

Exercice 3

On considère la matrice A définie par $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

3.a) Montrer que A est une matrice symétrique définie positive.

3.b) Effectuer la décomposition de Cholesky de A : $A = LL^T$. Expliciter la matrice L.