Alexandre Caboussat

Série 3 (b) - Révisions

Exercice 1

Soient $p_0, p_1, q_0, q_1, p_{1/2}$ cinq nombres réels donnés. Nous cherchons un polynôme p de degré 4 tel que

$$p(0) = p_0, \qquad p(1) = p_1, \tag{1}$$
$$p'(0) = q_0, \qquad p'(1) = q_1, \tag{2}$$
$$p(1/2) = p_{1/2}, \tag{3}$$

où $p'(t)$ est la dérivée de p au point t.

1.a) Soit le polynôme $\varphi_1(t) \in \mathbb{P}_4$ suivant :

$$\varphi_1(t) = \frac{t^2\left(t - \frac{1}{2}\right)(4t-5)}{-1/2}.$$

Vérifier que $\varphi_1(1) = 1, \varphi_1'(0) = \varphi_1(1/2) = \varphi_1(0) = \varphi_1'(1) = 0$.

1.b) Sur le même modèle, trouver un polynôme $\varphi_0(t) \in \mathbb{P}_4$ tel que

$$\varphi_0(0) = 1, \varphi_0'(0) = \varphi_0(1/2) = \varphi_0(1) = \varphi_0'(1) = 0,$$

un polynôme $\psi_0(t) \in \mathbb{P}_4$ tel que

$$\psi_0'(0) = 1, \psi_0(0) = \psi_0(1/2) = \psi_0(1) = \psi_0'(1) = 0,$$

un polynôme $\psi_1(t) \in \mathbb{P}_4$ tel que

$$\psi_1'(1) = 1, \psi_1(0) = \psi_1'(0) = \psi_1(1) = \psi_1(1/2) = 0$$

et un polynôme $\varphi_{1/2}(t) \in \mathbb{P}_4$ tel que

$$\varphi_{1/2}(1/2) = 1, \varphi_{1/2}(0) = \varphi_{1/2}'(0) = \varphi_{1/2}(1) = \varphi_{1/2}'(1) = 0.$$

1.c) Montrer que les polynômes $\varphi_0, \varphi_{1/2}, \varphi_1, \psi_0, \psi_1$ forment une base de $\mathbb{P}_4$.

1.d) Montrer que le polynôme

$$p(t) = p_0\varphi_0(t) + p_1\varphi_1(t) + q_0\psi_0(t) + q_1\psi_1(t) + p_{1/2}\varphi_{1/2}(t)$$

satisfait les relations (1), (2) et (3).

Exercice 2

Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cinq fois continûment dérivable, $h_0 > 0$, et $x_0 \in \mathbb{R}$, montrer qu'il existe $C > 0$ telle que, pour tout $0 < h \leqslant h_0$ on a :

$$\left| f^{(4)}(x_0) - \frac{\Delta_h^4 f(x_0)}{h^4} \right| \leqslant Ch.$$

Expliciter C.

Exercice 3

Soient $t_1 = -1$, $t_2 = \alpha$, $t_3 = +1$, où α est un nombre réel donné tel que $|\alpha| < 1$. Etant donnés ces trois points, nous sommes intéressés à trouver trois nombres (poids) ω_1, ω_2, ω_3 qui définiront la formule de quadrature

$$J(g) = \sum_{j=1}^{3} \omega_j g(t_j) = \omega_1 g(-1) + \omega_2 g(\alpha) + \omega_3 g(+1),$$

où g est une fonction continue donnée sur $[-1, +1]$.

3.a) Trouver les poids $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ en fonction de α tels que $J(p) = \int_{-1}^{+1} p(t)dt$ pour tout polynôme p de degré 2.

3.b) Existe-t-il α tel que $J(p) = \int_{-1}^{+1} p(t)dt$ pour tout polynôme p de degré 3 ? Si oui, que valent α et ω_1, ω_2, ω_3 ?

3.c) Comparer la formule de quadrature ainsi obtenue avec la formule de Simpson.