Alexandre Caboussat

Série 3

Exercice 1

Soit $t_1 = -\alpha$, $t_2 = \alpha$ où α est un nombre réel donné tel que $0 < \alpha \leqslant 1$. Etant donné ces deux points nous cherchons deux poids ω_1, ω_2 qui définiront la formule de quadrature

$$J(g) = \omega_1 g(-\alpha) + \omega_2 g(\alpha),$$

pour approcher $\int_{-1}^{1} g(t)dt$, la fonction g étant continue sur $[-1,1]$.

1.a) Trouver les poids ω_1 et ω_2 en fonction de α tels que $J(p) = \int_{-1}^{+1} p(t)dt$ pour tout polynôme p de degré 1.

1.b) Existe-t-il des valeurs de α telles que $J(t^2) = \int_{-1}^{+1} t^2 dt$? Vérifier que dans ce cas, $J(t^3) = \int_{-1}^{+1} t^3 dt$ et $J(t^4) \neq \int_{-1}^{+1} t^4 dt$.

Exercice 2

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue donnée. On veut approcher

$$\int_a^b f(x)\ dx \tag{1}$$

en utilisant deux formules de quadrature et de vérifier les ordres de convergence. Pour ce faire l'intervalle $[a,b]$ est partitionné en N intervalles $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0,1,2,...,N-1$ de même longueur $h = (b-a)/N$. Notons $\alpha = (1-1/\sqrt{3})/2$, $\beta = (1+1/\sqrt{3})/2$. Les formules composites du trapèze et de Gauss à deux points sont les suivantes:

$$\begin{aligned} L_h^{trap}(f) &= \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{N-1}\Big(f\big(x_i\big) + f\big(x_{i+1}\big)\Big), \\ L_h^{Gau2}(f) &= \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{N-1}\Big(f\big(x_i + \alpha h\big) + f\big(x_i + \beta h\big)\Big). \end{aligned} \tag{2}$$

D'après le cours, nous savons que si $f \in C^4([a,b])$, alors il existe une constante C positive telle que pour tout $h > 0$ on a:

$$\begin{aligned} \left|\int_a^b f(x)\ dx - L_h^{trap}(f)\right| &\leqslant Ch^2, \\ \left|\int_a^b f(x)\ dx - L_h^{Gau2}(f)\right| &\leqslant Ch^4. \end{aligned} \tag{3}$$

Le fichier `integration.m` est à votre disposition sur `Noto`/`Moodle`. À partir de la donnée de f, a, b, N le programme `integration.m` permet d'approcher (1) par les formules (2) et de vérifier les ordres de convergence (3).

2.a) Soit $a = 0$, $b = 1$ et $f(x) = x^2 e^x$. Vérifier que $\int_a^b f(x)dx = e - 2$.

2.b) Compléter le fichier `integration.m`.

2.c) Vérifier les ordres de convergence annoncés en (3) en exécutant le fichier `integration.m`.

Exercice 3

Soit $t_1 \in [-1, 0[$, $t_2 = 0$ et $t_3 \in]0, +1]$ trois points distincts fixés dans l'intervalle $[-1, +1]$. Si g est une fonction continue définie sur l'intervalle $[-1, +1]$, on considère la formule de quadrature à trois points

$$J(g) = \sum_{i=1}^{3} \omega_j g(t_j),$$

où ω_j sont les poids de la formule de quadrature.

3.a) Calculer les poids ω_1, ω_2, ω_3 en fonction des points t_1, t_2, t_3 pour que la formule de quadrature soit exacte pour des polynômes de degré 2.

3.b) Démontrer que si $t_1 = -t_3$, alors la formule de quadrature est exacte pour des polynômes de degré 3.

3.c) Existe-t-il des points t_1, t_3 tels que la formule de quadrature devienne exacte pour des polynômes de degré 4? Si oui, donner les valeurs numériques des points $(t_j)_{j=1}^3$ et des poids $(\omega_j)_{j=1}^3$. Justifier votre réponse.

3.d) La formule de quadrature à 3 points peut-elle être exacte pour des polynômes de degré 5? Justifier votre réponse.