Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
Analyse numérique (GM) / MATH-251(e)

Alexandre Caboussat
Printemps 2025

Série 2

Exercice 1

Soit $f : x \in \mathbb{R} \rightarrow f(x) \in \mathbb{R}$ une fonction continue donnée.

1.a) Soit δ_h l'opérateur de différence première centrée et soit $a : x \in \mathbb{R} \rightarrow a(x) \in \mathbb{R}$ une fonction continue. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\delta_h\Big(a(x)\delta_h f(x)\Big) = a(x-\tfrac{h}{2})f(x-h) - \Big(a(x-\tfrac{h}{2}) + a(x+\tfrac{h}{2})\Big)f(x) + a(x+\tfrac{h}{2})f(x+h).$$

1.b) Démontrer que si f est quatre fois continûment dérivable sur $\mathbb{R}$, si $x \in \mathbb{R}$ est fixé et si $h_0 > 0$ est un nombre positif donné, alors il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\left| \frac{d}{dx}\left((1+x)\frac{df}{dx}(x)\right) - \frac{\delta_h\Big((1+x)\delta_h f(x)\Big)}{h^2} \right| \leqslant Ch^2, \qquad \forall\, h \leqslant h_0.$$

Exercice 2

2.a) Pour toute fonction f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, trois fois continûment dérivable, et $x_0 \in \mathbb{R}$, montrer qu'il existe $C > 0$ telle que pour tout $0 < h \leqslant h_0$ on a :

$$\left| f'(x_0) - \frac{-f(x_0+2h) + 4f(x_0+h) - 3f(x_0)}{2h} \right| \leqslant Ch^2. \tag{1}$$

Expliciter C.

2.b) Compléter un programme permettant de vérifier numériquement que l'ordre de convergence de cette formule d'approximation de $f'(x_0)$ est bien l'ordre 2.

Le programme `bdf2.m` est à votre disposition sur `Noto` et/ou `Moodle`. A partir de la donnée de x_0, f, h, il permet de calculer l'erreur (1). Considérer $x_0 = 1$ et $f(x) = \sin(x)$.

Indication: pour ce faire, calculer l'erreur pour différentes valeurs de h (par exemple $h = 0.1, 0.05, 0.025$, etc) et représenter graphiquement cette erreur en fonction de h.

Exercice 3 (facultatif)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction trois fois continûment dérivable et soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

3.a) Exprimer $\Delta_h^2 f(x_0)$ où Δ_h est l'opérateur de différence première progressive avec $h \in \mathbb{R}$, $h > 0$.

3.b) Démontrer que si h_0 est un nombre positif donné, alors il existe C (indépendante de h) telle que

$$\left| f''(x_0) - \frac{\Delta_h^2 f(x_0)}{h^2} \right| \leqslant Ch, \quad \forall h \in]0, h_0].$$

3.c) Le programme `dfcent.m` est à votre disposition sur `Noto` et/ou `Moodle`. Après avoir complété la fonction, remplir le tableau ci-dessous dans le cas où $f(x) = \sin(2\pi x)$ et $x_0 = 0.8$.

h	$\left\| f''(x_0) - \frac{\Delta_h^2 f(x_0)}{h^2} \right\|$
0.1	
0.01	
0.001	
0.0001	
0.00001	
0.000001	

Commenter les résultats.