Alexandre Caboussat

Série 1

Exercice 1

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue donnée et soit $t_0 < t_1 < t_2, \ldots, t_n$, (n+1) points de $[a, b]$. On cherche un polynôme p de degré n tel que

$$p(t_j) = f(t_j), \qquad 0 \leq j \leq n.$$

Le polynôme p (interpolant de Lagrange) est donné par :

$$p(t) = \sum_{j=0}^{n} f(t_j)\varphi_j(t), \tag{1}$$

où $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ est la base de Lagrange de $\mathbb{P}_n$ associée à $t_0, t_1, \ldots, t_n$. Les fonctions de la base de Lagrange sont définies par

$$\varphi_j(t) = \frac{(t - t_0)(t - t_1)\ldots(t - t_{j-1})(t - t_{j+1})\ldots(t - t_n)}{(t_j - t_0)(t_j - t_1)\ldots(t_j - t_{j-1})(t_j - t_{j+1})\ldots(t_j - t_n)}. \tag{2}$$

1.a) Compléter un programme permettant d'interpoler une fonction continue f définie sur un intervalle $[a, b]$ par un polynôme de degré n (en particulier programmer les formules (1) et (2)).

Le programme `intlag.m` est à votre disposition sur `Noto` et/ou `Moodle`. A partir de la donnée de a, b, f, n, il permet de calculer le polynôme p qui interpole f aux points t_j, $0 \leq j \leq n$, équidistribués uniformément sur l'intervalle $[a, b]$.

1.b) On considère le cas où $f(t) = \sin(2\pi t)$. Vérifier numériquement que:

$$\max_{-1 \leqslant t \leqslant 1} |f(t) - p_n(t)| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Indication: pour ce faire, calculer l'erreur pour différentes valeurs de n (par exemple $n = 4, 8, 16, 32$, etc) et représenter graphiquement cette erreur en fonction de n.

1.c) On considère le cas où $f(t) = \frac{1}{1+25t^2}$. Vérifier numériquement que:

$$\max_{-1 \leqslant t \leqslant 1} |f(t) - p_n(t)| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

Exercice 2

Soit $t_0 < t_1$ deux nombres réels distincts et soit p_0, p_1, p_0', p_1' quatre nombres réels donnés. Nous cherchons un polynôme p de degré 3 tel que

$$p(t_0) = p_0, \qquad p(t_1) = p_1, \qquad p'(t_0) = p_0', \qquad p'(t_1) = p_1', \tag{3}$$

où $p'(t)$ est la dérivée de p au point t.

2.a) Posons $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$. Représenter graphiquement le polynôme de degré 3 vérifiant les relations suivantes :

$$p(t_0) = 0, \qquad p(t_1) = 1, \qquad p'(t_0) = 0, \qquad p'(t_1) = 1. \tag{4}$$

2.b) Soient $\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1$ les polynômes définis par :

$$\begin{aligned}
\varphi_0(t) &= -\frac{(t-t_1)^2(2t+t_1-3t_0)}{(t_0-t_1)^3};\\
\varphi_1(t) &= -\frac{(t-t_0)^2(2t+t_0-3t_1)}{(t_1-t_0)^3};\\
\psi_0(t) &= \frac{(t-t_1)^2(t-t_0)}{(t_0-t_1)^2};\\
\psi_1(t) &= \frac{(t-t_0)^2(t-t_1)}{(t_1-t_0)^2}.
\end{aligned}$$

Vérifier que, pour $i = 0, 1$, $\psi_i'(t_i) = 1, \psi_i(t_i) = \psi_i(t_{1-i}) = \psi_i'(t_{1-i}) = 0$ et $\varphi_i(t_i) = 1, \varphi_i'(t_i) = \varphi_i(t_{1-i}) = \varphi_i'(t_{1-i}) = 0$. Représenter graphiquement les polynômes $\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1$ lorsque $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$.

2.c) Montrer que les polynômes $\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1$ forment une base de $\mathbb{P}_3$ que nous appellerons **base d'Hermite de type cubique** associée à t_0 et t_1.

2.d) Montrer que le polynôme

$$p(t) = p_0\varphi_0(t) + p_1\varphi_1(t) + p_0'\psi_0(t) + p_1'\psi_1(t)$$

satisfait les relations (3). En déduire l'expression du polynôme p vérifiant les relations (4).

2.e) Soit ε tel que $0 < \varepsilon < \frac{t_1-t_0}{2}$ et soit p_ε le polynôme de degré 3 tel que :

$$\begin{aligned}
p_\varepsilon(t_0) = p_\varepsilon(t_0+\varepsilon) = 0,\\
p_\varepsilon(t_1) = p_\varepsilon(t_1+\varepsilon) = 1.
\end{aligned}$$

Expliciter p_ε dans la **base de Lagrange** de $\mathbb{P}_3$ associée aux points $t_0, t_0+\varepsilon, t_1, t_1+\varepsilon$.

2.f) Calculer $\lim_{\varepsilon\to 0} p_\varepsilon(t)$ et constater que l'on retrouve $\varphi_1(t)$. Peut-on obtenir toutes les fonctions de base d'Hermite par des procédés analogues ? Si oui, expliquer comment.