Alexandre Caboussat

Série 11

Exercice 1

On considère le problème 1D de la chaleur non linéaire suivant. Trouver une fonction $u : (x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}_+ \mapsto u(x,t) \in \mathbb{R}$ telle que

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = u(x,t)^3, & \forall\, x \in (0,1),\ \forall\, t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & \forall\, t > 0, \\ u(x,0) = w(x), & \forall\, x \in (0,1), \end{cases}$$

où $w(x)$ est une condition initiale donnée. Pour établir une approximation numérique de $(\mathcal{P})$, on utilise une méthode de **différences finies en espace** et **en temps**. Soit $\tau > 0$ un pas de temps donné; on pose $t_n = n\tau,\ n = 0, 1, 2, \ldots$. Soit N un entier positif; on note $h = \frac{1}{N+1}$ le pas d'espace et l'on pose $x_j = jh,\ j = 0, 1, 2, ..., N+1$. Enfin on note u_j^n une approximation de $u(x_j, t_n)$.

1.a) Ecrire le schéma d'approximation du problème $(\mathcal{P})$ en utilisant une méthode d'Euler rétrograde en temps.

1.b) Dans le cas du schéma issu de la méthode d'Euler rétrograde, on effectue un pas de la méthode de Newton pour calculer $u_j^{n+1},\ 1 \leqslant j \leqslant N$ à partir des valeurs $u_j^n,\ 1 \leqslant j \leqslant N$. Ecrire explicitement la méthode de Newton.

1.c) Ecrire le schéma d'approximation du problème $(\mathcal{P})$ en utilisant la méthode de Crank-Nicholson.

Exercice 2

On considère le problème de la chaleur 1D modifié suivant. Trouver une fonction $u : (x,t) \in [0,1] \times \mathbb{R}_+ \mapsto u(x,t) \in \mathbb{R}$ telle que

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + (1+x)u(x,t) = 0, & \forall\, x \in (0,1),\ \forall\, t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & \forall\, t > 0, \\ u(x,0) = x(1-x), & \forall\, x \in [0,1]. \end{cases}$$

Pour établir une approximation numérique de $(\mathcal{P})$, on utilise une méthode de **différences finies en espace** et **en temps**. Soit $\tau > 0$ un pas de temps donné; on pose $t_n = n\tau,\ n = 0, 1, 2, \ldots$. Soit N un entier positif; on note $h = \frac{1}{N+1}$ le pas d'espace et l'on pose $x_j = jh,\ j = 0, 1, 2, ..., N+1$. Enfin on note u_j^n une approximation de $u(x_j, t_n)$.

2.a) Ecrire le schéma d'approximation du problème $(\mathcal{P})$ en utilisant une méthode d'Euler progressive en temps. Pour n fixé, expliciter les valeurs u_i^{n+1}, $i = 0, \ldots, N+1$ en fonction des u_i^n, $i = 0, \ldots, N+1$.

2.b) Montrer que si on suppose $1 - \frac{2\tau}{h^2} - 2\tau \geqslant 0$, alors $u_i^n \geqslant 0$, $i = 0, \ldots, N+1$ implique $u_i^{n+1} \geqslant 0$, $i = 0, \ldots, N+1$.

Exercice 3

Soit f une fonction continue donnée sur l'intervalle $[0,1] \times [0, +\infty)$ et α un nombre réel positif donné. Nous cherchons une fonction $u : (x,t) \in (0,1) \times [0,+\infty) \to u(x,t) \in \mathbb{R}$ telle que

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + \alpha x^3 u(x,t) = f(x,t), & \forall\, x \in (0,1),\ \forall\, t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & \forall\, t > 0, \\ u(x,0) = \sin(2\pi x) & \forall\, x \in [0,1]. \end{cases}$$

Soit N un entier positif, $h = 1/(N+1)$, notons $x_i = ih$, $i = 0, 1, ..., N+1$. Soient $\tau > 0$ un pas de temps donné, $t_n = n\tau$ avec $n = 0, 1, 2, \ldots$, et u_i^n une approximation de $u(x_i, t_n)$, $i = 1, ..., N$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

3.a) Etablir le schéma d'approximation du problème $(\mathcal{P})$ en utilisant une méthode de **différences finies centrées** en espace et un schéma d'**Euler progressif** en temps.

3.b) Le fichier `paraprog.m` est à votre disposition sur `Noto`/`Moodle`. Le programme `paraprog.m` permet de résoudre le problème parabolique en utilisant ce **schéma d'Euler progressif.** Compléter le fichier. Pour tester l'algorithme, considérer le cas particulier où $\alpha = 0$ et $f(x,t) = 0$. Vérifier que la solution de $(\mathcal{P})$ est donnée par $u(x,t) = \sin(2\pi x)\exp(-4\pi^2 t)$.

3.c) Vérifier numériquement que le schéma est stable si $\tau \leqslant h^2/2$.

Pour ce faire: taper `u=paraprog(19,800,0.00125)`, `u=paraprog(19,800,0.0013)`,...

3.d) On pose $\alpha = 1$ et $f(x,t) = x^3 e^{-4\pi^2 t}\sin(2\pi x)$. Vérifier que la solution du problème $(\mathcal{P})$ est donnée par $u(x,t) = e^{-4\pi^2 t}\sin(2\pi x)$. Vérifier que la méthode est d'ordre $h^2 + \tau$.

Pour ce faire: taper `paraprog(9,160,0.005)`, `paraprog(19,640,0.00125)`, `paraprog(39,2560,0.0003125)`, `paraprog(79,10240,0.000078125)`, etc. Notez que l'erreur est approximativement divisée par quatre à chaque fois que h est divisé par 2 et τ par 4.

3.e) Ecrire le schéma d'approximation du problème $(\mathcal{P})$ en utilisant cette fois-ci une méthode de **différences finies centrées** en espace et un schéma d'**Euler rétrograde** en temps. Soient $\vec{w}$, $\vec{f}(t_n)$ et $\vec{u}^n$ les N-vecteurs définis par

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} \sin(2\pi x_1) \\ \vdots \\ \sin(2\pi x_N) \end{pmatrix}, \qquad \vec{f}(t_n) = \begin{pmatrix} f(x_1, t_n) \\ \vdots \\ f(x_N, t_n) \end{pmatrix}, \qquad \vec{u}^n = \begin{pmatrix} u_1^n \\ \vdots \\ u_N^n \end{pmatrix}.$$

Ecrire le schéma sous la forme :

$$A\vec{u}^{n+1} = \vec{u}^{n} + \tau \vec{f}(t_{n+1}), \qquad n = 0, 1, 2, ..., . \tag{1}$$

Expliciter la matrice A.

3.f) On utilise une méthode de décomposition LL^T pour résoudre (1). Le fichier `pararetro.m` est à votre disposition sur `Noto`/`Moodle`. Le programme `pararetro.m` permet de résoudre le problème parabolique en utilisant ce **schéma d'Euler rétrograde.** À partir de la donnée de f, N, τ et M (le nombre de pas de temps), ce fichier fournit une approximation de $u(x_1, t_M)$, ..., $u(x_N, t_M)$. Compléter le fichier.

3.g) On suppose $\alpha = 0$ et $f(x,t) = 0$. Vérifier numériquement que le schéma d'Euler rétrograde en temps est inconditionnellement stable, $\forall \tau$, $h \in \mathbb{R}_+^\star$.

Pour ce faire: taper `u=paraprog(19,800,0.00125)`, `u=paraprog(19,800,0.0013)`,...

3.h) On pose $\alpha = 1$ et $f(x,t) = x^3 e^{-4\pi^2 t} \sin(2\pi x)$. Vérifier que la méthode est d'ordre $h^2 + \tau$.

Pour ce faire: taper `paraprog(9,40,0.02)`, `paraprog(19,160,0.005)`, `paraprog(39,640,0.00125)`, `paraprog(79,2560,0.0003125)`, etc. Notez à nouveau que l'erreur est approximativement divisée par quatre à chaque fois que h est divisé par 2 et τ par 4.