Analyse numérique

Approximation de problèmes paraboliques. Problème de la chaleur

Alexandre Caboussat

Equation de la chaleur 1D

$$\rho c_p \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = f(x,t) \qquad 0 < x < L, \quad \forall t > 0.$$
$$u(0,t) = u(L,t) = 0 \qquad \forall t > 0 \quad \text{(conditions aux limites)},$$
$$u(x,0) = w(x) \qquad \forall 0 < x < L \quad \text{(condition initiale)},$$

Sketch:

Principe de conservation d'énergie thermique

$$\rho c_p \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = f(x,t) \qquad 0 < x < L, \quad \forall t > 0.$$

On intégre sur $[a, b] \subset [0, L]$:

$$\int_a^b \rho c_p \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)dx - \int_a^b k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)dx = \int_a^b f(x,t)dx$$

$$\underbrace{\frac{d}{dt}}_{\text{variation au fil du temps}} \underbrace{\left(\int_a^b \rho c_p u(x,t)dx\right)}_{\text{énergie thermique}} \underbrace{- \left[k\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right]_a^b}_{\text{flux de chaleur}} = \underbrace{\int_a^b f(x,t)dx}_{\text{puissance thermique/source}}$$

Problème modèle

Chercher $u : (0,1) \times (0,T) \to \mathbb{R}$ telle que:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = f(x,t) \qquad & \forall 0 < x < 1, \quad \forall t > 0, \\
u(0,t) = u(1,t) = 0 \qquad & \forall t > 0, \\
u(x,0) = w(x) \qquad & \forall 0 < x < 1.
\end{aligned}
$$

Solution exacte

Si $\rho c_p = 1$, $f(x,t) = 0$ et $w(x) = \sin(\pi x)$, alors

$$u(x,t) = \sin(\pi x) e^{-k\pi^2 t}$$

Sketch:

Propriétés

Si $f(x,t) = 0$, on a

1. Si $w(x) \geq 0$ pour tout $x \in (0,1)$, alors
$$u(x,t) \geq 0, \quad \forall x \in (0,1), \forall t > 0.$$
2. $$\max_{x\in(0,1)} |u(x,t)| \leq \max_{x\in(0,1)} |w(x)|, \quad \forall t > 0.$$

Sketch:

Méthode numérique - principe

- Soit N un entier positif, $h = \frac{1}{N+1}$ un pas d'espace , $x_i = i\ h$, $i = 0, 1, 2, \ldots, N+1$.
- Soit $\tau > 0$ un pas de temps, $t_n = n\tau$, $n = 0, 1, 2, \ldots$
- Calculer $u_i^n \simeq u(x_i, t_n)$ avec une "marche en temps".

Discrétisation en espace: différences finies

Soit N un entier positif, $h = \frac{1}{N+1}$, $x_i = i\,h$, $i = 0, 1, 2, \ldots, N+1$.

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = f(x,t)$$

Chercher $u_i(t) \simeq u(x_i, t)$, $i = 1, 2, \ldots, N$.

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}u_i(t) + \frac{k}{h^2}\Big(-u_{i-1}(t) + 2u_i(t) - u_{i+1}(t)\Big) = f(x_i, t) \qquad i = 1, \ldots, N, \quad \forall t > 0\\
&u_0(t) = u_{N+1}(t) = 0 \qquad \forall t > 0,\\
&u_i(0) = w(x_i) \qquad i = 1, \ldots, N.
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Semi-discrétisation en espace

Semi-discrétisation en espace

Soient

$$A = \frac{k}{h^2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_N(t) \end{bmatrix}, \vec{f}(t) = \begin{bmatrix} f(x_1,t) \\ f(x_2,t) \\ \vdots \\ f(x_N,t) \end{bmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} w(x_1) \\ w(x_2) \\ \vdots \\ w(x_N) \end{bmatrix}$$

Alors le schéma semi-discrétisé est équivalent à

$$\dot{\vec{u}}(t) = -A\vec{u}(t) + \vec{f}(t) \qquad \forall t > 0,$$
$$\vec{u}(0) = \vec{w},$$

où $\dot{\vec{u}}(t) = [du_1(t)/dt, du_2(t)/dt, \ldots, du_N(t)/dt]^T$.

Système différentiel

$$\begin{aligned}
&\dot{\vec{u}}(t) = -A\vec{u}(t) + \vec{f}(t) \qquad \forall t > 0,\\
&\vec{u}(0) = \vec{w},
\end{aligned}$$

- Système différentiel du premier ordre avec une condition initiale
- Schémas d'Euler progressif et rétrograde (par exemple)

Schéma d'Euler progressif

Soit $\tau > 0$ un pas de temps, $t_n = n\tau$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

$$\dot{\vec{u}}(t) = -A\vec{u}(t) + \vec{f}(t) \qquad \forall t > 0,$$
$$\vec{u}(0) = \vec{w},$$

Notons $\vec{u}^n \simeq \vec{u}(t_n)$. Le schéma est:

$$\frac{\vec{u}^{n+1} - \vec{u}^n}{\tau} = -A\vec{u}^n + \vec{f}(t_n), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$
$$\vec{u}^0 = \vec{w}.$$

Schéma discrétisé

$$\frac{\vec{u}^{n+1} - \vec{u}^n}{\tau} = -A\vec{u}^n + \vec{f}(t_n), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$
$$\vec{u}^0 = \vec{w}.$$

$$\vec{u}^{n+1} = (I - \tau A)\vec{u}^n + \tau\vec{f}(t_n), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

- Schéma explicite $\vec{u}^n \to \vec{u}^{n+1}$
- Discrétisation complète par la méthode des différences finies.

Alternative: discrétisations simultanées

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = f(x,t)$$

Définition

Un schéma numérique est stable si, lorsque $f \equiv 0$:

1. Si $u_i^n \geq 0$, $i = 1, \ldots N$, alors $u_i^{n+1} \geq 0$, $i = 1, \ldots N$
2. $$\max_{1 \leq j \leq N} |u_j^{n+1}| \leq \max_{1 \leq j \leq N} |u_j^n|$$

Résultat de stabilité

Théorème (cas $f \equiv 0$)

Si

$$\tau \leq \frac{h^2}{2k},$$

le schéma d'Euler progressif est stable, i.e.

$$\max_{1 \leq j \leq N} |u_j^n| \to 0, \qquad \text{quand} \quad n \to \infty$$

De plus, si $u_i^n \geq 0$, $i = 1, \ldots N$, alors $u_i^{n+1} \geq 0$, $i = 1, \ldots N$

Démonstration

Démonstration (2)

Démonstration (3)

Schéma d'Euler rétrograde

Soit $\tau > 0$ un pas de temps, $t_n = n\tau$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

$$\dot{\vec{u}}(t) = -A\vec{u}(t) + \vec{f}(t) \qquad \forall t > 0,$$
$$\vec{u}(0) = \vec{w},$$

Notons $\vec{u}^n \simeq \vec{u}(t_n)$. Le schéma est:

$$\frac{\vec{u}^{n+1} - \vec{u}^n}{\tau} = -A\vec{u}^{n+1} + \vec{f}(t_{n+1}), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$
$$\vec{u}^0 = \vec{w}.$$

Schéma discrétisé

Notons $\vec{u}^n \simeq \vec{u}(t_n)$. Le schéma est:

$$\frac{\vec{u}^{n+1} - \vec{u}^n}{\tau} = -A\vec{u}^{n+1} + \vec{f}(t_{n+1}), \qquad n = 0, 1, 2, \dots,$$
$$\vec{u}^0 = \vec{w}.$$

$$(I + \tau A)\vec{u}^{n+1} = \vec{u}^n + \tau\vec{f}(t_{n+1}), \quad n = 0, 1, 2, \dots.$$

- Schéma implicite $\vec{u}^n \to \vec{u}^{n+1}$
- Système linéaire à résoudre, avec $(I + \tau A)$ symétrique définie positive

Résultat de stabilité

Théorème (cas $f \equiv 0$)

Le schéma d'Euler rétrograde est inconditionnellement stable, i.e. si $\vec{u}^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, est la solution de

$$(I + \tau A)\vec{u}^{n+1} = \vec{u}^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

alors, pour tout $\tau > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} \| \vec{u}^n \| = 0.$$

Démonstration (sketch)

Comme

$$\vec{u}^{n+1} = (I + \tau A)^{-1} \vec{u}^n.$$

Si $|||\cdot|||$ est la norme spectrale d'une matrice alors :

$$\| \vec{u}^{n+1} \| \leq ||| (I + \tau A)^{-1} ||| \cdot \| \vec{u}^n \|$$

et, comme $(I + \tau A)^{-1}$ est symétrique :

$$\| \vec{u}^{n+1} \| \leq \beta \| \vec{u}^n \|$$

où β est le maximum des valeurs propres de $(I + \tau A)^{-1}$ en valeur absolue. Comme A est symétrique définie positive, ses valeurs propres λ_A sont réelles positives. Les valeurs propres de $(I + \tau A)^{-1}$ sont donc $(1 + \tau \lambda_A)^{-1} \in]0, 1[$.

$$\| \vec{u}^n \| \leq \beta^n \| \vec{u}^0 \|$$

Remarque

Les schémas d'Euler progressif et rétrograde sont tous les deux d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace. L'erreur commise est donc d'ordre

$$\mathcal{O}(\tau + h^2).$$

Schéma de Crank-Nicholson

Les schémas d'Euler sont d'ordre 1 en τ. Pour avoir un schéma d'ordre 2, nous pouvons utiliser une moyenne des schémas d'Euler progressif et rétrograde:

$$\frac{\vec{u}^{n+1} - \vec{u}^{n}}{\tau} + A\frac{\vec{u}^{n+1} + \vec{u}^{n}}{2} = \frac{\vec{f}(t_{n+1}) + \vec{f}(t_n)}{2},$$

ou, de façon équivalente

$$\left(I + \frac{\tau}{2}A\right)\vec{u}^{n+1} = \left(I - \frac{\tau}{2}A\right)\vec{u}^{n} + \frac{\tau}{2}\left(\vec{f}(t_{n+1}) + \vec{f}(t_n)\right).$$

Le schéma est un schéma numérique d'ordre 2, implicite, inconditionnellement stable.

Eléments finis

Eléments finis

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \qquad - k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) &= f(x,t) \\
\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)v(x) - k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)v(x) &= f(x,t)v(x) \\
\int_0^1 \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)v(x)dx - \int_0^1 k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)v(x)dx &= \int_0^1 f(x,t)v(x)dx \\
\int_0^1 \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)v(x)dx + \int_0^1 k\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)v'(x)dx &= \int_0^1 f(x,t)v(x)dx
\end{aligned}$$

si $v(0) = v(1) = 0$.

Eléments finis (résumé)

Soit V l'espace des fonctions $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ continues, de premières dérivées g' continues par morceaux et telles que $g(0) = g(1) = 0$.

Problème semi-discrétisé

Chercher $u(\cdot, t) \in V$ telle que

$$\int_0^1 \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)v(x)dx + \int_0^1 k\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)v'(x)dx = \int_0^1 f(x,t)v(x)dx, \quad \forall v \in V$$

$\Rightarrow$ Formulation faible (ou variationnelle)

Approximation de Galerkin

Soient $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N$ N fonctions linéairement indépendantes de V et $V_h = \mathrm{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N\} \subset V$

Problème de Galerkin

Chercher $u_h(\cdot, t) \in V_h$ telle que

$$\int_0^1 \frac{\partial u_h}{\partial t}(x,t) v_h(x) dx + \int_0^1 k \frac{\partial u_h}{\partial x}(x,t) v_h'(x) dx = \int_0^1 f(x,t) v_h(x) dx, \quad \forall v_h \in V_h$$

De plus nous exigeons que

$$u_h(x, 0) = w_h(x) \qquad \forall x \in [0, 1],$$

où w_h est une approximation de w dans V_h.

1. Poser

$$u_h(x,t) = \sum_{i=1}^{N} u_i(t)\varphi_i(x), \qquad \forall x \in [0,1], \quad \forall t > 0.$$

2. Choisir

$$v_h = \varphi_j, \quad j = 1, 2, \dots, N$$

$$\sum_{i=1}^{N} \dot{u}_i(t) \int_0^1 \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx + \sum_{i=1}^{N} u_i(t) \int_0^1 k\varphi_i'(x)\varphi_j'(x)dx$$

$$= \int_0^1 f(x,t)\varphi_j(x)dx \qquad j = 1, \dots, N.$$

Système différentiel

Définitions

- Matrice de rigidité : $A_{ji} = \int\limits_0^1 k\varphi_i'(x)\varphi_j'(x)dx$
- Matrice de masse : $M_{ji} = \int\limits_0^1 \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx$
- $\vec{u}(t) = [u_1(t), u_2(t), \ldots, u_N(t)]^T$, $\vec{f}(t)$ tel que $f_j(t) = \int\limits_0^1 f(x,t)\varphi_j(x)dx$.

Chercher $\vec{u}(t)$ tel que $M\dot{\vec{u}}(t) + A\vec{u}(t) = \vec{f}(t) \qquad \forall t > 0.$

Schéma d'Euler progressif

$$M\frac{\vec{u}^{n+1}-\vec{u}^{n}}{\tau} = -A\vec{u}^{n} + \vec{f}(t_n)$$

ou

$$M\vec{u}^{n+1} = (M-\tau A)\vec{u}^{n} + \tau\vec{f}(t_n),$$

Résoudre un système pour obtenir $\vec{u}^{n+1}$ car M n'est pas diagonale! Le schéma n'est pas explicite!
Pour le rendre explicite, on calcule M utilisant la formule de quadrature des trapèzes.

$$M_{ji} = \int_0^1 \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx \simeq L_h(\varphi_i\varphi_j) = \begin{cases} h & \text{si } i=j, \\ 0 & \text{si } i\neq j. \end{cases}$$

Ce procédé s'appelle mass lumping.