Analyse numérique

Eléments finis pour des problèmes aux limites unidimensionnels

Alexandre Caboussat

Un problème aux limites unidimensionnel

Soient $c, f \in C^0([0,1])$, chercher $u \in C^2([0,1])$ telle que

$$\begin{aligned} -u''(x) + c(x)u(x) &= f(x) \qquad \text{si } 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1) &= 0. \end{aligned}$$

Ce problème est appelé problème fort

Un peu de calcul

$$-u''(x) + c(x)u(x) = f(x)$$

$$-u''(x)v(x) + c(x)u(x)v(x) = f(x)v(x)$$

$$-\int_0^1 u''(x)v(x)dx + \int_0^1 c(x)u(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx$$

$$\int_0^1 u'(x)v(x)'dx - u'(1)v(1) + u'(0)v(0) + \int_0^1 c(x)u(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx$$

Résumé

En multipliant par une fonction $v \in C^1([0,1])$, intégrant sur $[0,1]$:

$$-\int_0^1 u''(x)v(x)dx + \int_0^1 c(x)u(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx.$$

En intégrant par parties:

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx - u'(1)v(1) + u'(0)v(0) + \int_0^1 c(x)u(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx.$$

En imposant $v(0) = v(1) = 0$:

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 c(x)u(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx.$$

Espace vectoriel

Définition

Soit V l'ensemble de toutes les fonctions g continues, de première dérivée g' continue par morceaux et telles que $g(0) = g(1) = 0$.

V est un espace vectoriel

Problème variationnel

Chercher $u \in V$ tel que

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 c(x)u(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx.$$

pour toute fonction $v \in V$

Ce problème est appelé problème faible ou problème variationnel.

Remarques

- Les fonctions $u \in V$ sont moins régulières que la solution du problème fort.
- La solution du problème fort est une solution du problème faible.
- Si $c(x) \geq 0$, alors la solution du problème faible est unique, et c'est également la solution du problème fort.

Principe d'énergie

$v = u$, $c \equiv 0$

$$\int_0^1 (u'(x))^2 dx = \int_0^1 f(x)u(x)dx.$$

Méthode de Galerkin

- Point de départ des méthodes d'éléments finis et des méthodes spectrales.
- Basée sur la formulation faible (contrairement aux différences finies)

Rappel

Chercher $u \in V$ tel que

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 c(x)u(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx.$$

pour toute fonction $v \in V$

Méthode de Galerkin (2)

- Soient $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N$, N fonctions linéairement indépendantes de V
- $V_h = \mathrm{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N\}$ est un sous-espace vectoriel de V:

$$g \in V_h \quad \Leftrightarrow \quad g(x) = \sum_{i=1}^{N} g_i \varphi_i(x)$$

où $g_i \in \mathbb{R}$.

- Approximation du problème faible: trouver une fonction $u_h \in V_h$ telle que

$$\int_0^1 u_h'(x) v_h'(x) dx + \int_0^1 c(x) u_h(x) v_h(x) dx = \int_0^1 f(x) v_h(x) dx$$

pour toute fonction $v_h \in V_h$.

Approximation de Galerkin

Problème variationnel

Chercher $u \in V$ tel que

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 c(x)u(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx, \quad \forall v \in V$$

Problème de Galerkin

Chercher $u_h \in V_h$ telle que

$$\int_0^1 u_h'(x)v_h'(x)dx + \int_0^1 c(x)u_h(x)v_h(x)dx = \int_0^1 f(x)v_h(x)dx, \quad \forall v_h \in V_h$$

Approximation de Galerkin (2)

$$u_h \in V_h, \quad \int_0^1 u_h'(x)v_h'(x)dx + \int_0^1 c(x)u_h(x)v_h(x)dx = \int_0^1 f(x)v_h(x)dx, \quad \forall v_h \in V_h$$

Puisque u_h est cherché dans V_h, on peut écrire :

$$u_h \in V_h \quad \Leftrightarrow \quad u_h(x) = \sum_{i=1}^{N} u_i\varphi_i(x), \qquad (u_1, u_2, \ldots, u_N \ \text{inconnues})$$

Soit $v_h = \varphi_j$, $1 \leq j \leq N$. Chercher $u_1, u_2, \ldots, u_N$ tels que

$$\sum_{i=1}^{N} u_i \left(\int_0^1 \varphi_i'(x)\varphi_j'(x)dx + \int_0^1 c(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)dx \right) = \int_0^1 f(x)\varphi_j(x)dx$$

pour $j = 1, 2, \ldots, N$.

Approximation de Galerkin (3)

$$\sum_{i=1}^{N} u_i \left(\int_0^1 \varphi_i'(x)\varphi_j'(x)dx + \int_0^1 c(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)dx \right) = \int_0^1 f(x)\varphi_j(x)dx, \quad j = 1, 2, \ldots, N.$$

Soit A la $N \times N$ matrice:

$$A_{ji} = \int_0^1 \varphi_i'(x)\varphi_j'(x)dx + \int_0^1 c(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)dx,$$

Si $\vec{u} = [u_1, u_2, \ldots, u_N]^T$ et $\vec{f}$ vecteur:

$$f_j = \int_0^1 f(x)\varphi_j(x)dx$$

Solution d'un système linéaire : chercher $\vec{u}$ tel que

$$A\vec{u} = \vec{f}$$

Remarques

- Si $c = 0$, la matrice A est appelée matrice de rigidité
- Méthode de Galerkin nécessite la résolution d'un système linéaire
- Question ouverte: choix de V_h ?

Méthode des éléments finis

Choix des fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N$ définissant V_h ?

- La matrice A est une matrice creuse.
- La solution u_h doit converger vers la solution u lorsque le nombre $N \to \infty$.

Résultat de convergence

L'espace vectoriel V muni de la norme $|\cdot|_1$ définie par

$$|g|_1 = \left(\int_0^1 (g'(x))^2 dx \right)^{1/2} \text{ si } g \in V.$$

est un espace vectoriel normé

Théorème

Soit $c(x) \geq 0$, $\forall x \in [0,1]$. Si u est solution du problème faible et u_h solution du problème de Galerkin, on a

$$|u - u_h|_1 \leq C \min_{v_h \in V_h} |u - v_h|_1,$$

où $C = 1 + \max_{x \in [0,1]} |c(x)|$ (indépendante de V_h).

Démonstration (cas: $c(x) = 0$)

Si u est solution du problème faible et u_h solution du problème de Galerkin, on a (par soustraction):

$$\int_0^1 \left(u'(x) - u_h'(x)\right) v_h'(x)dx = 0 \qquad \forall v_h \in V_h.$$

Posons $e(x) = u(x) - u_h(x)$:

$$\int_0^1 e'(x)v_h'(x)dx = 0, \qquad \forall v_h \in V_h.$$

Donc

$$\begin{aligned} |e|_1^2 &= \int_0^1 \left(e'(x)\right)^2 dx = \int_0^1 e'(x)(u'(x) - u_h'(x))dx = \int_0^1 e'(x)u'(x)dx \\ &= \int_0^1 e'(x)(u'(x) - v_h'(x))dx, \end{aligned}$$

où $v_h \in V_h$.

Démonstration (2)

$$|e|_1^2 \;=\; \int_0^1 e'(x)(u'(x) - v_h'(x))dx, \quad \forall v_h \in V_h$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|e|_1^2 \leq \left(\int_0^1 (e'(x))^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^1 (u'(x) - v_h'(x))^2 dx \right)^{1/2},$$

Donc

$$|e|_1^2 \leq |e|_1 \; |u - v_h|_1 .$$

Simplifier et prendre le minimum sur $v_h \in V_h$.

Méthode d'éléments finis de degré 1

Divisons l'intervalle $[0, 1]$ en $N + 1$ parties (N étant un entier positif) et posons $h = 1/(N + 1)$, $x_i = ih$ avec $i = 0, 1, 2, \ldots, N + 1$.
On définit, pour $i = 1, 2, \ldots, N$:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & \text{si } x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\[2ex] \dfrac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\[2ex] 0 & \text{si } x \leq x_{i-1} \text{ ou } x \geq x_{i+1}. \end{cases}$$

Méthode d'éléments finis de degré 1 (2)

- $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}, \qquad 0 \le j \le N+1$
- $\varphi_{i_{|[x_{j-1},x_j]}}$ est un polynôme de degré un, $1 \le j \le N+1$.
- $\varphi_i \in V$
- $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N$ sont linéairement indépendantes
- $V_h = \mathrm{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N\}$

Définitions

Nous dirons ainsi que :

- $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{N+1}$ sont les nœuds de la discrétisation
- $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_N, x_{N+1}]$ sont les éléments géométriques
- $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N$ sont les fonctions de base du sous-espace V_h de type éléments finis de degré 1 associées aux nœuds intérieurs $x_1, x_2, \ldots, x_N$.

Propriété

Si $g \in V_h$, alors

$$g(x) = \sum_{i=1}^{N} g_i \varphi_i(x),$$

En particulier,

$$g(x_j) = g_j, \quad 1 \leq j \leq N$$

$$g(0) = g(1) = 0$$

et g est une fonction affine sur chaque élément géométrique.

Convergence

Rappel

Si $u \in V$, alors
$$r_h u = \sum_{i=1}^{N} u(x_i)\varphi_i$$
est l'interpolant de degré 1 par intervalle de la fonction u.

Par construction, $r_h u \in V_h$ et
$$\min_{v_h \in V_h} |u - v_h|_1 \leq |u - r_h u|_1 .$$

Ainsi:
$$|u - u_h|_1 \leq C \min_{v_h \in V_h} |u - v_h|_1 \leq C|u - r_h u|_1 .$$

Résultat

Théorème

Soit $c(x) \geq 0, \forall x \in [0, 1]$. Si u est solution du problème faible et u_h solution du problème de Galerkin avec V_h engendré par les fonctions de base de type éléments finis de degré 1, on a l'estimation d'erreur

$$|u - u_h|_1 \leq Ch,$$

où C est une constante indépendante de N (et donc de h).

Démonstration

Il faut montrer:

$$|u - r_h u|_1 \leq \tilde{C}h,$$

où $\tilde{C}$ est une constante indépendante de N.

Posons $w := u - r_h u$. Comme $r_h u(x_i) = u(x_i)$, $0 \leq i \leq N+1$, $w(x_i) = 0$.

Théorème de Rolle : il existe $\xi_i \in]x_i, x_{i+1}[$ tel que $w'(\xi_i) = 0$, $0 \leq i \leq N$.
Ainsi, comme $r_h u$ est un polynôme de degré 1 sur chaque $[x_i, x_{i+1}]$ on a

$$w'(x) = \int_{\xi_i}^{x} w''(s)ds = \int_{\xi_i}^{x} u''(s)ds, \qquad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

Donc :

$$|w'(x)| \leq \int_{x_i}^{x_{i+1}} |u''(s)|ds, \qquad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

Démonstration (2)

Inégalité de Cauchy-Schwarz: pour $x \in [x_i, x_{i+1}]$:

$$|w'(x)| \leq \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} 1^2 ds\right)^{1/2} \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} |u''(s)|^2 ds\right)^{1/2} \leq h^{1/2} \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} |u''(s)|^2 ds\right)^{1/2}$$

Donc:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} |w'(x)|^2 dx \leq h^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} |u''(s)|^2 ds.$$

Sommer sur l'indice i :

$$|u - r_h u|_1^2 = |w|_1^2 = \int_0^1 |w'(x)|^2 dx = \sum_{i=0}^{N} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |w'(x)|^2 dx \leq h^2 \sum_{i=0}^{N} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |u''(s)|^2 ds$$

$$= h^2 \int_0^1 |u''(s)|^2 ds.$$

Conclure avec $\tilde{C} = \left(\int_0^1 |u''(s)|^2 ds\right)^{1/2}$

Système linéaire éléments finis de degré 1

Calcul des coefficients :

$$A_{ji} = \int_0^1 \varphi_i'(x)\varphi_j'(x)dx + \int_0^1 c(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)dx, \qquad 1 \leq i, j \leq N$$

$$f_j = \int_0^1 f(x)\varphi_j(x)dx \qquad 1 \leq j \leq N.$$

Explicitement

$$\int_0^1 \varphi_i'(x)\varphi_j'(x)dx = \begin{cases} 2/h & \text{si } i = j, \\ -1/h & \text{si } |i-j| = 1, \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

Système linéaire éléments finis de degré 1 (2)

Formule d'intégration numérique (e.g. trapèzes)

$$\int_0^1 \ell(x)dx \simeq L_h(\ell) = h\left(\frac{1}{2}\ell(x_0) + \ell(x_1) + \ell(x_2) + \cdots + \ell(x_N) + \frac{1}{2}\ell(x_{N+1})\right).$$

Ainsi

$$\int_0^1 c(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)dx \simeq L_h(c\varphi_i\varphi_j) = \begin{cases} hc(x_j) & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$

$$\int_0^1 f(x)\varphi_j(x)dx \simeq L_h(f\varphi_j) = hf(x_j).$$

Remarque

Le système linéaire obtenu avec la méthode des éléments finis est équivalent au système linéaire obtenu avec la méthode des différences finies (à un facteur h).

La méthode des éléments finis est plus flexible.