Analyse numérique

Intégration numérique

Alexandre Caboussat

alexandre.caboussat@epfl.ch

Intégrales définies

Soit $f : x \in [a, b] \to f(x) \in \mathbb{R}$ une fonction continue. On veut approcher numériquement

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Partition d'un intervalle

$$[a,b] = \bigcup_{i=0}^{N-1} [x_i, x_{i+1}]$$

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots\cdots < x_{N-1} < x_N = b.$$

$$h = \max_{0 \leq i \leq N-1} |x_{i+1} - x_i|$$

Remarques

- Lorsque N augmente, nous pouvons placer les points x_i de sorte à ce que h soit petit.
- Intervalles réguliers

$$h = \frac{b-a}{N} \qquad \text{et} \qquad x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \ldots, N.$$

Approximation de l'intégrale

Etant donné une partition, on peut d'écrire :

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx.$$

Formules de quadrature

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$$

Graphiquement:

Formules de quadrature sur $[-1, +1]$

Changement de variable (linéaire) $x \in [x_i, x_{i+1}] \rightarrow t \in [-1, +1]$

$$t = 2\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} - 1$$

ou

$$x = x_i + (x_{i+1} - x_i)\frac{t+1}{2},$$

Donc:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = \frac{x_{i+1} - x_i}{2}\int_{-1}^{+1} g_i(t)dt, \qquad g_i(t) = f\left(x_i + (x_{i+1} - x_i)\frac{t+1}{2}\right)$$

Définition

Formule de quadrature pour approcher numériquement $\int_{-1}^{+1} g(t)dt$

Si $g \in C^0([-1,+1])$, la formule de quadrature

$$\int_{-1}^{+1} g(t)dt \simeq J(g) \underset{def}{=} \sum_{j=1}^{M} \omega_j g(t_j)$$

- Les M points $-1 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_M \leq 1$ sont appelés points d'intégration;
- Les M nombres réels $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_M$ sont appelés poids de la formule de quadrature;

Formule du trapèze

Formule à 2 points ($M = 2$):

$$t_1 = -1, t_2 = +1, \omega_1 = 1, \omega_2 = 1$$

et donc

$$J(g) = g(-1) + g(1).$$

Formule composite

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \\
&= \sum_{i=0}^{N-1} \frac{x_{i+1}-x_i}{2} \int_{-1}^{+1} g_i(t)dt \\
&\simeq \sum_{i=0}^{N-1} \frac{x_{i+1}-x_i}{2} J(g_i) \\
&\simeq \sum_{i=0}^{N-1} \frac{x_{i+1}-x_i}{2} \sum_{j=1}^{M} \omega_j f\left(x_i + (x_{i+1}-x_i)\frac{t_j+1}{2}\right). \\
&\simeq L_h(f)
\end{aligned}
$$

Exemple

Formule du trapèze

$(t_1 = -1, t_2 = 1, \omega_1 = \omega_2 = 1)$

$$L_h(f) = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{x_{i+1} - x_i}{2} \Big(f(x_i) + f(x_{i+1}) \Big).$$

Graphiquement ($N = 4$):

Propriété

La formule de quadrature

$$J(g) = \sum_{j=1}^{M} \omega_j g(t_j)$$

pour calculer numériquement $\int_{-1}^{+1} g(t)dt$ est exacte pour les polynômes de degré $r \geq 0$ si

$$J(p) = \int_{-1}^{+1} p(t)dt, \qquad \forall p \in \mathbb{P}_r$$

Théorème

Supposons que la formule de quadrature

$$J(g) = \sum_{j=1}^{M} \omega_j g(t_j)$$

pour calculer numériquement $\int_{-1}^{+1} g(t)dt$ soit exacte pour $p \in \mathbb{P}_r$. Soit $f \in C^{r+1}([a,b])$. Alors il existe $C > 0$ (indépendante du choix des points x_i) telle que

$$\left| \int_a^b f(x)dx - L_h(f) \right| \leq Ch^{r+1}.$$

Application : formule du trapèze

Si $p \in \mathbb{P}_1$, on a $p(t) = \alpha t + \beta$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, et on peut vérifier que:

$$\int_{-1}^{+1} p(t)dt = J(p) \quad \Rightarrow \quad \text{exacte pour des polynômes de degré 1 } (r = 1)$$

Let $N \in \mathbb{N}$, $h = (b-a)/N$, $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, 2, \dots, N$. Si $f \in C^2([a, b])$ then

$$\left| \int_a^b f(x)dx - L_h(f) \right| \leq Ch^2,$$

où C est une constante qui ne dépend pas de N (et donc pas de h).

Démonstration (1)

Démonstration (2)

Démonstration (3)

Remarque

$$\left| \int_a^b f(x)dx - L_h(f) \right| \leq Ch^{r+1} \to 0, \quad h \to 0$$

Cette erreur devient d'autant plus petite avec h que r est grand. (l'erreur est divisée par 2^{r+1} chaque fois que N est multiplié par 2 !)

Objectif

Chercher des points d'intégration t_j et des poids ω_j, $1 \leq j \leq M$ afin que $J(\cdot)$ soit exacte pour des polynômes de degré r aussi élevé que possible.

Problème

Supposons donnés M points d'intégration dans $[-1, +1]$:

$$-1 \leq t_1 < t_2 < t_3 < \cdots < t_M \leq 1.$$

Cherchons les poids $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_M$ afin que $J(g) = \sum_{j=1}^{M} \omega_j g(t_j)$ soit exacte pour des polynômes de degré r aussi élevé que possible.

Poids d'une formule de quadrature

- Soit $g \in C^0([-1,+1])$. Son interpolant $\tilde{g}$ de degré $M-1$ aux points $t_1, \ldots, t_M$ est :

$$\tilde{g}(t) = \sum_{j=1}^{M} g(t_j)\varphi_j(t).$$

Résultat

Interpolation de Lagrange

Soit $t_1 < t_2 < \cdots < t_M$, M points distincts de l'intervalle $[-1, +1]$ et soit $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_M$ la base de Lagrange de $\mathbb{P}_{M-1}$ associée à ces M points. Alors la formule de quadrature

$$J(g) = \sum_{j=1}^{M} \omega_j g(t_j)$$

est exacte pour les polynômes de degré $M - 1$ si et seulement si

$$\omega_j = \int_{-1}^{+1} \varphi_j(t)dt, \qquad j = 1, 2, \dots, M.$$

Démonstration (1)

Supposons $J(\cdot)$ est exacte pour les polynômes de degré $M-1$:

$$J(p)=\sum_{j=1}^{M}\omega_j p(t_j)=\int_{-1}^{+1} p(t)dt, \quad \forall p\in\mathbb{P}_{M-1}.$$

On choisit $p=\varphi_k$, $k=1,2,\ldots,M$:

$$J(\varphi_k)=\sum_{j=1}^{M}\omega_j\varphi_k(t_j)=\int_{-1}^{+1}\varphi_k(t)dt.$$

Puisque $\varphi_k(t_j)=0$ si $j\neq k$ et $\varphi_k(t_k)=1$, nous avons bien :

$$\omega_k=\int_{-1}^{+1}\varphi_k(t)dt.$$

Démonstration (2)

Réciproquement, on suppose

$$\omega_j = \int_{-1}^{+1} \varphi_j(t)dt, \qquad j = 1, 2, \ldots, M.$$

Soit $p \in \mathbb{P}_{M-1}$ et la base de Lagrange associée à $t_1, t_2, \ldots, t_M$:

$$p(t) = \sum_{j=1}^{M} p(t_j)\varphi_j(t).$$

Donc

$$\int_{-1}^{+1} p(t)dt = \sum_{j=1}^{M} p(t_j) \int_{-1}^{+1} \varphi_j(t)dt = \sum_{j=1}^{M} p(t_j)\omega_j = J(p).$$

Formule du trapèze

$M = 2$, $t_1 = -1$ et $t_2 = +1$.

Formule du rectangle (1)

$M = 1$, $t_1 = 0$.

Formule du rectangle (2)

Cette formule de quadrature est exacte pour $p \in \mathbb{P}_0$. Elle est aussi exacte pour $p \in \mathbb{P}_1$.

Formule du rectangle (3)

Formule composite

$$L_h(f) = \sum_{i=0}^{N-1} (x_{i+1} - x_i) f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$$

satisfait:

$$\left| \int_a^b f(x)dx - L_h(f) \right| \leq Ch^2.$$

Formule de Simpson

$M = 3$, $t_1 = -1$, $t_2 = 0$, $t_3 = +1$.

Formule de Simpson (2)

$$L_h(f) = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{x_{i+1} - x_i}{6} \left(f(x_i) + 4f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) + f(x_{i+1}) \right).$$

Cette formule de quadrature est exacte pour $p \in \mathbb{P}_2$. Elle est aussi exacte pour $p \in \mathbb{P}_3$.

En effet, si $g(t) = t^3$, alors $J(g) = 0$ et $\int_{-1}^{+1} g(t)dt = \int_{-1}^{+1} t^3 dt = 0$.

$$\left| \int_a^b f(x)dx - L_h(f) \right| \leq Ch^4.$$