Analyse numérique

Approximation de problèmes hyperboliques. Equation de transport

Alexandre Caboussat

Equation de transport 1D

Soient:

- $c : (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to c(x,t) \in \mathbb{R}$
- $f : (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to f(x,t) \in \mathbb{R}$
- $w : x \in \mathbb{R} \to w(x) \in \mathbb{R}$

Chercher $u : (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to u(x,t) \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + c(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = f(x,t) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall t > 0,$$

avec la condition initiale

$$u(x,0) = w(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Cas particulier

Chercher $u : (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to u(x, t) \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + c_0 \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall t > 0,$$

avec la condition initiale

$$u(x, 0) = w(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Solution exacte

$(c(x,t) = c_0, f = 0)$

$$u(x,t) = w(x - c_0 t)$$

La condition initiale w est transportée le long de l'axe Ox, à la vitesse c_0.

$$w(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x \in [0,1], \\ 1 + x & \text{si } x \in [-1,0], \\ 0 & \text{si } x \notin [-1,+1]. \end{cases}$$

Propriétés ($c(x,t) = c_0, f = 0$)

Si $w(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors $u(x,t) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |u(x,t)| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} |w(x)|, \quad \forall t > 0$$

Principe de conservation

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + c_0 \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = f(x,t) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall t > 0,$$

$a < b$ quelconques

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)dx + c_0 \int_a^b \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)dx &= \int_a^b f(x,t)dx \\ \frac{d}{dt}\int_a^b u(x,t)dx + [c_0 u(x,t)]_a^b &= \int_a^b f(x,t)dx \end{aligned}$$

Méthode de différences finies

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + c(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = f(x,t) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall t > 0,$$

Pas spatial $h > 0$, pas temporel $\tau > 0$, $x_j = jh$, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $t_n = n\tau$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Grille:

Méthode de différences finies centrées

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + c(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = f(x,t) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall t > 0,$$

Chercher $u_j^n \simeq u(x_j, t_n)$:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + c(x_j, t_n)\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = f(x_j, t_n), \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

L'approximation initiale est définie par $u_j^0 = w(x_j)$ pour $j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Schéma numérique d'ordre deux en espace ($\mathcal{O}(h^2)$) et un en temps ($\mathcal{O}(\tau)$)

Schéma explicite centré

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + c(x_j, t_n)\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = f(x_j, t_n), \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \tau\left(f(x_j, t_n) - c(x_j, t_n)\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h}\right).$$

Définition

Un schéma numérique est stable si, lorsque $f \equiv 0$:

1. Si $u_i^n \geq 0$, $i \in \mathbb{Z}$, alors $u_i^{n+1} \geq 0$, $i \in \mathbb{Z}$
2. $$\sup_{i \in \mathbb{Z}} |u_i^{n+1}| \leq \sup_{i \in \mathbb{Z}} |u_i^n|$$

Résultat (sans démonstration)

Si $c = c_0$, $f = 0$, w assez régulière et 2π-périodique:

$$w(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \alpha_m e^{imx}, \qquad \alpha_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} w(x) e^{-imx} dx.$$

alors

$$u_j^n = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \alpha_m e^{imjh} \Bigg(\underbrace{1 - \frac{c_0 \tau}{h} i \sin mh}_{\star} \Bigg)^n$$

où le module du coefficient d'amplification de la m-ième harmonique est $\sqrt{1 + \left(\frac{c_0\tau}{h} \sin mh\right)^2} > 1$

Conséquence

Le schéma explicite centré est **toujours instable!**

C'est un mauvais schéma numérique qu'il ne faut surtout pas utiliser !

Schéma décentré (upwind)

Principe

Transporter dans le sens des x positifs lorsque c_0 est positif, et dans le sens des x négatifs lorsque c_0 est négatif.

Si $c_0 > 0$:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + c_0 \, \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = f(x_j, t_n),$$

pour $j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Schéma décentré (upwind)

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + c(x_j, t_n)\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = f(x_j, t_n) \qquad \text{si } c(x_j, t_n) > 0$$

(on dit que le schéma est décentré en arrière)

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + c(x_j, t_n)\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} = f(x_j, t_n) \qquad \text{si } c(x_j, t_n) < 0$$

(on dit que le schéma est décentré en avant).

Schéma explicite

Si $c_0 > 0$ et $f = 0$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + c_0 \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = 0$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n \left(1 - \frac{\tau c_0}{h}\right) + u_{j-1}^n \left(\frac{\tau c_0}{h}\right)$$

Résultat (stabilité)

Le schéma explicite décentré est stable si

$$\left(1 - \frac{\tau c_0}{h}\right) \geq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\tau}{h} \leq \frac{1}{|c_0|}$$

Si c n'est pas constant, la condition de stabilité devient

$$\frac{\tau}{h} \leq \frac{1}{\sup\limits_{x \in \mathbb{R}, t > 0} |c(x,t)|}.$$

Le schéma explicite décentré est conditionnellement stable. La condition de stabilité est appelée condition de Courant-Friedrichs-Lewy ou condition CFL.

Démonstration

Démonstration (2)

Démonstration (3)

Extension: Intervalle borné

Chercher $u : (x,t) \in [0,1] \times \mathbb{R}^+ \to u(x,t) \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + c(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = f(x,t) \quad \forall x \in [0,1], \quad \forall t > 0,$$

avec la condition initiale

$$u(x,0) = w(x) \qquad \forall x \in [0,1]$$

Extension : Intervalle borné (2)

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + c(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = f(x,t) \quad \forall x \in [0,1], \quad \forall t > 0,$$

- Si $c(0,t) > 0$, imposer $u(0,t)$
- Si $c(1,t) < 0$, imposer $u(1,t)$

Extension : le cas 2D

Equation de transport 2D

Chercher $u : (x_1, x_2, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to u(x_1, x_2, t) \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_1, x_2, t) + \vec{c}(x_1, x_2, t) \cdot \overrightarrow{\text{grad}} u(x_1, x_2, t) = f(x_1, x_2, t) \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall t > 0,$$

avec la condition initiale

$$u(x_1, x_2, 0) = w(x_1, x_2) \qquad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Illustration