Analyse numérique

Approximation de problèmes hyperboliques. Equation des ondes

Alexandre Caboussat

Illustration 1D : corde vibrante

Equation des ondes 1D

- $f : (x, t) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^+ \to f(x, t) \in \mathbb{R}$
- $w : x \in [0, 1] \to w(x) \in \mathbb{R}$
- $v : x \in [0, 1] \to v(x) \in \mathbb{R}$
- $c > 0$

Chercher $u : (x, t) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^+ \to u(x, t) \in \mathbb{R}$ telle que

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = f(x, t) && \forall x \in]0, 1[, \quad \forall t > 0, \\
&u(0, t) = u(1, t) = 0 && \forall t > 0, \\
&u(x, 0) = w(x) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v(x) && \forall x \in]0, 1[.
\end{aligned}
$$

Définition

L'équation des ondes 1D est appelée problème hyperbolique d'ordre deux,

A cette équation nous ajoutons **deux** conditions aux limites, ainsi que **deux** conditions initiales.

Cas particulier

$f = 0$, $v = 0$, $w(0) = w(1) = 0$

Introduisons la fonction 2-périodique $\omega : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\omega(x) = \begin{cases} w(x) & \text{si } x \in [0,1] \\ -w(-x) & \text{si } x \in [-1,0] \end{cases}$$

(prolongement par imparité et périodicité)

Vérification

Principe de conservation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = f(x,t)$$

$$\int_0^1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\, dx - c^2 \int_0^1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) dx = \int_0^1 f(x,t) \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) dx$$

$$\frac{d}{dt}\left(\int_0^1 \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx \right) + c^2 \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} dx - c^2 \left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} \right]_{x=0}^{x=1} = \int_0^1 f \frac{\partial u}{\partial t} dx$$

$$\frac{d}{dt}\left(\int_0^1 \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + c^2 \int_0^1 \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx \right) = \int_0^1 f \frac{\partial u}{\partial t} dx$$

Interprétation

Le déplacement vertical u de la corde est la somme de deux ondes se propageant de droite à gauche et de gauche à droite à la vitesse c.

Méthode de différences finies

Soit N, $h = \frac{1}{N+1}$, $x_j = jh \; j = 0, 1, 2, \ldots, N+1$.

Semi-discrétisation en espace

Chercher $u_j(t) \simeq u(x_j, t)$:

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2}{dt^2} u_j(t) + c^2 \frac{-u_{j-1}(t) + 2u_j(t) - u_{j+1}(t)}{h^2} = f(x_j, t) \quad && j = 1, ..., N, \quad \forall t > 0, \\
&u_0(t) = u_{N+1}(t) = 0 && \forall t > 0, \\
&u_j(0) = w(x_j) \text{ et } \frac{d}{dt} u_j(0) = v(x_j) && j = 1, \ldots, N.
\end{aligned}$$

Système différentiel (du deuxième ordre)

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

- $\vec{u}(t) = [u_1(t), \ldots, u_N(t)]^T$, $\vec{f}(t) = [f(x_1, t), \ldots, f(x_N, t)]^T$
- $\vec{w} = [w(x_1), \ldots, w(x_N)]^T$, $\vec{v} = [v(x_1), \ldots, v(x_N)]^T$

$$\ddot{\vec{u}}(t) + c^2 A\vec{u}(t) = \vec{f}(t) \qquad \forall t > 0,$$
$$\vec{u}(0) = \vec{w}, \qquad \dot{\vec{u}}(0) = \vec{v},$$

Méthode de Newmark

Soit $\tau > 0$, $t_n = n\tau$, $n = 0, 1, 2, \ldots$,

$$\ddot{\vec{u}}(t) + c^2 A\vec{u}(t) = \vec{f}(t)$$

Méthode de Newmark

Soit $\tau > 0$, $t_n = n\tau$, $n = 0, 1, 2, \ldots$,

Chercher $\vec{u}^n \simeq \vec{u}(t_n)$:

$$\frac{\vec{u}^{n+1} - 2\vec{u}^n + \vec{u}^{n-1}}{\tau^2} + c^2 A\vec{u}^n = \vec{f}(t_n), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

$$\vec{u}^0 = \vec{w},$$

$$\vec{u}^1 = ??$$

Calcul de $\vec{u}^1$

$$\vec{u}^1 = \vec{w} + \tau \vec{v} + \frac{1}{2}\tau^2 \left(\vec{f}(0) - c^2 A \vec{w} \right).$$

Schéma explicite

$$\frac{\vec{u}^{n+1} - 2\vec{u}^n + \vec{u}^{n-1}}{\tau^2} + c^2 A\vec{u}^n = \vec{f}(t_n)$$

Connaissant $\vec{u}^0$ et $\vec{u}^1$, on calcule (pour $n = 1, 2, \ldots$):

$$\vec{u}^{n+1} = (2I - \tau^2 c^2 A)\vec{u}^n - \vec{u}^{n-1} + \tau^2 \vec{f}(t_n),$$

Avec $\lambda = \tau^2 c^2 / h^2$ (et $u_0^n = u_{N+1}^n = 0$):

$$u_j^{n+1} = 2\,(1-\lambda)\,u_j^n + \lambda\left(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n\right) - u_j^{n-1} + \tau^2 f(x_j, t_n),$$

pour $j = 1, \ldots, N$.

Alternative: discrétisations simultanées

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = f(x,t)$$

Analyse de stabilité (idée)

Posons $f = 0$ et $v = 0$. Supposons

$$w(x) = \sin(m\pi x)$$

où m est un entier positif (sinon: développer $w(x)$ en série de Fourier)

Solution exacte

Si $w(x) = \sin(m\pi x)$:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\Big(w(x-ct) + w(x+ct)\Big) = \sin(m\pi x)\cos(m\pi ct)$$

Formule trigonométrique:

$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta, \quad \alpha,\beta \in \mathbb{R}$$

Solution approchée

Pour $j = 1, \ldots, N$

$$u_j^{n+1} = 2(1-\lambda)u_j^n + \lambda(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n) - u_j^{n-1}$$

Formules trigonométriques.... (again!)

Solution approchée (2)

On peut montrer que
$$u_j^n = \alpha_n \sin(m\pi jh),$$
avec
$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= 1\\
\alpha_1 &= 1 - \lambda(1 - \cos(m\pi h))\\
\alpha_2 &= 2\alpha_1\alpha_1 - \alpha_0\\
&\vdots\\
\alpha_n &= 2\alpha_1\alpha_{n-1} - \alpha_{n-2}
\end{aligned}$$

Comparaison

$$u_j^n = \alpha_n \sin(m\pi jh),$$

vs

$$u(x_j, t_n) = \sin(m\pi jh)\cos(m\pi cn\tau)$$

Définition

Le schéma est stable s'il existe C telle que:

$$|\alpha_n| \leq C, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad m = 1, 2, \ldots$$

Théorèmes (sans démonstration)

Résultat 1

Le schéma est stable si la condition CFL suivante est satisfaite :

$$\tau \leq \frac{h}{c}.$$

Résultat 2

Si la condition CFL est satisfaite, alors $h \geq \tau c$ et le schéma numérique est d'ordre 2, i.e.,

$$\max_{j=1,\dots,N} |u_j^M - u(x_j, T)| \leq Ch^2, \qquad \text{si } h \to 0,$$

où C indépendante de M et N.

Equation des ondes et éléments finis

Eléments finis

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) \quad - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \quad = f(x,t)$$

Pour tout $t > 0$, multiplier par une fonction test $v : x \in [0,1] \to \varphi(x) \in \mathbb{R}$ appartenant à V:

$$\begin{array}{rcl}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) \quad - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) & = & f(x,t) \\
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)v(x) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)v(x) & = & f(x,t)v(x) \\
\int_0^1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)v(x)dx - c^2 \int_0^1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)v(x)dx & = & \int_0^1 f(x,t)v(x)dx \\
\int_0^1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)v(x)dx + c^2 \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \cdot v'(x)dx & = & \int_0^1 f(x,t)v(x)dx
\end{array}$$

Système différentiel

$$\int_0^1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)v(x)dx + c^2 \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \cdot v'(x)dx = \int_0^1 f(x,t)v(x)dx$$

- $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N \in V$
- $V_h = \mathrm{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N\}$
- Soit $u_h \simeq u$:

$$u_h(x,t) = \sum_{i=1}^{N} u_i(t)\varphi_i(x) \qquad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

- Choisir $v = \varphi_j$, $j = 1, \ldots, N$.

Système différentiel (2)

$$\sum_{i=1}^{N} \ddot{u}_i(t) \int_0^1 \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx + c^2 \sum_{i=1}^{N} u_i(t) \int_0^1 \varphi_i'(x)\varphi_j'(x)dx = \int_0^1 f(x,t)\varphi_j(x)dx,$$

$$j = 1, \ldots, N, \quad \forall t > 0.$$

Système différentiel (3)

$$
\begin{aligned}
M_{ji} &= \int_0^1 \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx, \qquad i,j=1,\dots,N, \qquad \text{(matrice de masse)}\\
A_{ji} &= \int_0^1 \varphi_i'(x)\varphi_j'(x)dx, \qquad i,j=1,\dots,N, \qquad \text{(matrice de rigidité)}\\
f_j(t) &= \int_0^1 f(x,t)\varphi_j(x)dx, \qquad j=1,\dots,N, \qquad \text{(second membre)}
\end{aligned}
$$

$$
M\ddot{\vec{u}}(t) + c^2 A\vec{u}(t) = \vec{f}(t), \qquad \forall t > 0.
$$

Schéma de Newmark

$$M\frac{\vec{u}^{n+1} - 2\vec{u}^{n} + \vec{u}^{n-1}}{\tau^2} + c^2 A\vec{u}^{n} = \vec{f}(t_n)$$

Résoudre un système pour obtenir $\vec{u}^{n+1}$ car M n'est pas diagonale! Le schéma n'est pas explicite!
Pour le rendre explicite, on calcule M utilisant la formule de quadrature des trapèzes.

$$M_{ji} = \int_0^1 \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx \simeq L_h(\varphi_i\varphi_j) = \begin{cases} h & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Ce procédé s'appelle mass lumping.