Analyse numérique

Différences finies pour des problèmes aux limites unidimensionnels

Alexandre Caboussat

Un problème aux limites unidimensionnel

Fléchissement d'une poutre

Soient $c, f \in C^0([0,1])$, chercher $u \in C^2([0,1])$ telle que

$$
\begin{aligned}
-u''(x) + c(x)u(x) &= f(x) \qquad \text{si } 0 < x < 1,\\
u(0) = u(1) &= 0.
\end{aligned}
$$

Sketch:

Remarques préliminaires

- La première équation est une équation différentielle du deuxième ordre
- L'intégration doit faire apparaître deux constantes
- Deux conditions $u(0) = 0$, $u(1) = 0$, appelées conditions aux limites

- Le problème a une et une seule solution (si $c \geq 0$)
- Il n'existe pas de formule permettant d'obtenir explicitement $u(x)$ dans le cas général.

Exemple simple ($c = 0$)

$$
\begin{aligned}
&-u''(x) = f(x) \qquad \text{si } 0 < x < 1,\\
&u(0) = u(1) = 0.
\end{aligned}
$$

Exemple simple ($c = 0$, $f = 1$)

$$\begin{aligned} -u''(x) &= 1 \qquad \text{si } 0 < x < 1, \\ u(0) &= u(1) = 0. \end{aligned}$$

Remarque

Si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0, 1]$, alors $u(x) \geq 0$.

Rappel

$$u''(x) = \frac{\delta_h^2 u(x)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2)$$

Méthode des différences finies

Soit N un entier positif; on pose $h = 1/(N+1)$ et on note $x_j = jh$, $j = 0, 1, 2, \ldots, N+1$, les points de discrétisation.

Sketch:

Problème discret

Calculer $u_j \simeq u(x_j)$ tels que

$$\frac{-u_{j-1} + 2u_j - u_{j+1}}{h^2} + c(x_j)u_j = f(x_j) \qquad 1 \leq j \leq N,$$
$$u_0 = u_{N+1} = 0.$$

Schéma d'approximation par une méthode de différences finies du problème continu.

$\Rightarrow$ chercher un nombre fini de valeurs $u_j \simeq u(x_j)$, $1 \leq j \leq N$.

Système linéaire

Si $\vec{u} = [u_1, u_2, \ldots, u_N]^T$, $\vec{f} = [f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_N)]^T$, A est la $N \times N$ matrice

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 2 + c_1 h^2 & -1 & & & \\ -1 & 2 + c_2 h^2 & -1 & & 0 \\ & -1 & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & 2 + c_N h^2 \end{bmatrix},$$

avec $c_i = c(x_i)$, alors le problème discret est équivalent à

$$A\vec{u} = \vec{f}$$

Théorème

Si $c(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$, A est symétrique définie positive, donc régulière. La solution du système linéaire est notée $\vec{u}$.

Théorème

Convergence

Si $f \in C^2([0,1])$, et si $c(x) \geq 0$, $\forall x \in [0,1]$, alors il existe une constante C indépendante de N (et donc de h) telle que

$$\max_{1 \leq j \leq N} \mid u(x_j) - u_j \mid \leq Ch^2.$$

Remarques:

- $\lim_{N \to \infty} \max_{1 \leq j \leq N} \mid u(x_j) - u_j \mid = 0.$
- Si $f \in C^2([0,1])$, alors $u \in C^4([0,1])$

Démonstration

Démonstration (2)

Démonstration (3)

Problème aux limites non linéaire

Fléchissement d'une poutre

Soient $f \in C^0([0,1])$, et $\tilde{c} : (x,v) \in [0,1] \times \mathbb{R} \longrightarrow \tilde{c}(x,v) \in \mathbb{R}$; chercher $u \in C^2([0,1])$ telle que

$$
\begin{aligned}
&-u''(x) + \tilde{c}(x,u(x)) = f(x), \qquad \text{si } 0 < x < 1,\\
&u(0) = u(1) = 0,
\end{aligned}
$$

Différences finies

Soit $u_j \simeq u(x_j)$:

$$\frac{-u_{j-1} + 2u_j - u_{j+1}}{h^2} + \tilde{c}(x_j, u_j) = f(x_j) \qquad 1 \leq j \leq N,$$
$$u_0 = u_{N+1} = 0.$$

$\Rightarrow$ Système non linéaire de N équations pour les N inconnues $u_1, u_2, \ldots, u_N$.

Système non linéaire

Soit $\vec{u} = [u_1, u_2, \ldots, u_N]^T$ et $F(\vec{u}) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$:

$$F(\vec{u}) = \begin{bmatrix} \dfrac{2u_1 - u_2}{h^2} & + & \tilde{c}(x_1, u_1) - f(x_1) \\ \dfrac{-u_1 + 2u_2 - u_3}{h^2} & + & \tilde{c}(x_2, u_2) - f(x_2) \\ & \vdots & \\ \dfrac{-u_{N-2} + 2u_{N-1} - u_N}{h^2} & + & \tilde{c}(x_{N-1}, u_{N-1}) - f(x_{N-1}) \\ \dfrac{-u_{N-1} + 2u_N}{h^2} & + & \tilde{c}(x_N, u_N) - f(x_N) \end{bmatrix}$$

Système non linéaire (2)

Chercher $\vec{u}$ tel que :

$$F(\vec{u}) = \vec{0}.$$

Méthode de Newton

Soit $\vec{u}^0$ donné. Pour $n = 0, 1, 2, \ldots$:

$$\vec{u}^{n+1} = \vec{u}^n - DF(\vec{u}^n)^{-1} F(\vec{u}^n)$$

Notons

$$d(x,v) = \frac{\partial}{\partial v}\tilde{c}(x,v) \quad \text{et} \quad d_j^n \underset{def}{=} d(x_j, u_j^n), \qquad 1 \leq j \leq N.$$

Alors

$$DF(\vec{u}^n) = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 2+d_1^n h^2 & -1 & & & \bigcirc \\ -1 & 2+d_2^n h^2 & -1 & & \\ & -1 & \ddots & \ddots & \\ \bigcirc & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & 2+d_N^n h^2 \end{bmatrix}$$

Algorithme de Newton

Calculer $\vec{u}^n \to \vec{u}^{n+1}$:

- Construire le vecteur $F(\vec{u}^n)$;
- Construire la matrice $DF(\vec{u}^n)$;
- Calculer le vecteur $\vec{y}$ solution de

$$DF(\vec{u}^n)\vec{y} = F(\vec{u}^n)$$

- Mettre à jour le vecteur $\vec{u}^{n+1} = \vec{u}^n - \vec{y}$.

Si $\vec{u}^0$ est proche de $\vec{u}$ et si F satisfait certaines hypothèses, convergence quadratique.