Analyse numérique

Problèmes de convection-diffusion

Alexandre Caboussat

Problème de convection-diffusion stationnaire

Soit $f : x \in [0,1] \to f(x) \in \mathbb{R}$, $c : x \in [0,1] \to c(x) \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ fixé.

Trouver $u : x \in [0,1] \to u(x) \in \mathbb{R}$ tel que:

$$-\varepsilon u''(x) + c(x)u'(x) = f(x) \qquad \forall x \in]0,1[,$$

$$u(0) = u(1) = 0.$$

Convection-diffusion

$$-\varepsilon u''(x) + c(x)u'(x) = f(x)$$

- Problème stationnaire (aucune variable temporelle).
- Si $c(x) \equiv 0$, problème de diffusion stationnaire
- Si $\varepsilon = 0$, problème de transport stationnaire

Cas particulier

Cas $c = c_0 \neq 0$ et $f = f_0$

$$-\varepsilon u''(x) + c_0 u'(x) = f_0$$

$\Rightarrow$ équation différentielle linéaire à coefficients constants à résoudre explicitement

$$u(x) = \frac{f_0}{c_0}\left(x - \frac{1 - \exp\left(\frac{c_0}{\varepsilon}x\right)}{1 - \exp\left(\frac{c_0}{\varepsilon}\right)}\right) \qquad \forall x \in [0, 1].$$

Illustration

Si $c_0 > 0$ et $\varepsilon << c_0$, alors $u(x) \simeq f_0 x / c_0$, sauf dans un voisinage d'ordre ε / c_0 du point limite $x = 1$ (couche limite).

Différences finies centrées

Soit N un entier positif, $h = \frac{1}{N+1}$, $x_j = jh$, $j = 0, 1, \ldots, N+1$ et $u_j \simeq u(x_j)$.

$$-\varepsilon u''(x) + c(x)u'(x) = f(x)$$

Schéma centré

$$\varepsilon \frac{2u_j - u_{j-1} - u_{j+1}}{h^2} + c(x_j)\frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h} = f(x_j), \qquad j = 1, \ldots, N,$$

avec $u_0 = u_{N+1} = 0$.

Système linéaire

Si $c(x) = c_0$, $f(x) = f_0$:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{2\varepsilon}{h^2} & -\frac{\varepsilon}{h^2} + \frac{c_0}{2h} & & \\ -\frac{\varepsilon}{h^2} - \frac{c_0}{2h} & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -\frac{\varepsilon}{h^2} + \frac{c_0}{2h} \\ & & -\frac{\varepsilon}{h^2} - \frac{c_0}{2h} & \frac{2\varepsilon}{h^2} \end{bmatrix}$$

et $f_j = f_0$, $j = 1, \ldots, N$.

$$A\vec{u} = \vec{f}$$

Remarque ($c(x) = c_0 \neq 0$, $f(x) = f_0$)

$$\varepsilon \frac{2u_j - u_{j-1} - u_{j+1}}{h^2} + c_0 \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h} = f_0, \qquad j = 1, \dots, N,$$

$$\frac{2\varepsilon}{h^2} u_j + \left(-\frac{\varepsilon}{h^2} - \frac{c_0}{2h}\right) u_{j-1} + \left(-\frac{\varepsilon}{h^2} + \frac{c_0}{2h}\right) u_{j+1} = f_0, \qquad j = 1, \dots, N,$$

- Si $h = 2\varepsilon/c_0$, on a
$$u_j = \frac{f_0 x_j}{c_0}$$
- Si $h < 2\varepsilon/c_0$, solution numérique correcte.
- Si $h > 2\varepsilon/c_0$, oscillations au voisinage de la couche limite. Le pas d'espace h est trop grand par rapport à la couche limite ($\sim \varepsilon/c_0$)

Différences finies décentrées

Si $\alpha_j \in (0,1)$, alors
$$u'(x_j) \simeq \alpha_j \frac{u_j - u_{j-1}}{h} + (1-\alpha_j)\frac{u_{j+1} - u_j}{h}$$
(moyenne pondérée entre différences finies rétrograde et progressive)

Schéma numérique :

$$\varepsilon \frac{2u_j - u_{j+1} - u_{j-1}}{h^2} + \frac{c(x_j)}{h}\Big(\alpha_j(u_j - u_{j-1}) + (1-\alpha_j)(u_{j+1} - u_j)\Big) = f(x_j), \qquad j = 1, \ldots, N$$

avec $u_0 = u_{N+1} = 0$.

Remarques

- Si $\alpha_j = 1/2$, pour tout *j*, le schéma est le schéma centré (oscillant si *h* pas suffisamment petit!)
- Choix optimal de α_j?

Schéma upwind

Supposons $c(x) = c_0 \geq 0$:

$$\varepsilon \frac{2u_j - u_{j+1} - u_{j-1}}{h^2} + c_0 \frac{u_j - u_{j-1}}{h} = f(x_j), \qquad j = 1, \ldots, N$$

avec $u_0 = u_{N+1} = 0$.

Diffusion numérique

On peut montrer que le schéma upwind

$$\varepsilon \frac{2u_j - u_{j+1} - u_{j-1}}{h^2} + c_0 \frac{u_j - u_{j-1}}{h} = f(x_j), \qquad j = 1, \ldots, N$$

$$\varepsilon^* \frac{2u_j - u_{j+1} - u_{j-1}}{h^2} + c_0 \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h} = f(x_j), \qquad j = 1, \ldots, N$$

avec $u_0 = u_{N+1} = 0$ et

$$\varepsilon^* = \varepsilon + c_0 \frac{h}{2}$$

Schéma upwind = schéma centré avec diffusion numérique

Problème de convection-diffusion évolutif

Soit $c_0 > 0, \varepsilon > 0$ fixé.

Trouver $u : [0,1] \times \mathbb{R}_+ \to u(x,t) \in \mathbb{R}$ tel que:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + c_0 \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0 \qquad \forall x \in]0,1[, \;\; t > 0$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \qquad t > 0,$$

$$u(x,0) = w(x), \qquad \forall x \in]0,1[$$

Schéma implicite décentré

Supposons $c_0 \geq 0$.

$$
\begin{aligned}
&\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + \varepsilon \frac{-u_{i-1}^{n+1} + 2u_i^{n+1} - u_{i+1}^{n+1}}{h^2} + c_0 \frac{u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{h} = 0, \qquad 1 \leq i \leq N,\\
&u_0^{n+1} = u_{N+1}^{n+1} = 0,\\
&u_i^0 = w(x_i), \qquad 1 \leq i \leq N.
\end{aligned}
$$

$$
\left(1 + 2\varepsilon \frac{\tau}{h^2} + c_0 \frac{\tau}{h}\right) u_i^{n+1} - \left(\varepsilon \frac{\tau}{h^2} + c_0 \frac{\tau}{h}\right) u_{i-1}^{n+1} - \varepsilon \frac{\tau}{h^2} u_{i+1}^{n+1} = u_i^n.
$$

Positivité

Si $u_i^n \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, N$, alors $u_i^{n+1} \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, N$.

$$\left(1 + 2\varepsilon\frac{\tau}{h^2} + c_0\frac{\tau}{h}\right) u_i^{n+1} = \left(\varepsilon\frac{\tau}{h^2} + c_0\frac{\tau}{h}\right) u_{i-1}^{n+1} + \varepsilon\frac{\tau}{h^2} u_{i+1}^{n+1} + u_i^n.$$

Pour n fixé, notons k un entier tel que

$$u_k^{n+1} \leq u_j^{n+1} \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, N+1.$$

Supposons $k \neq 0$ et $k \neq N+1$.

$$\begin{aligned}
\left(1 + 2\varepsilon\frac{\tau}{h^2} + c_0\frac{\tau}{h}\right) u_k^{n+1} &= \left(\varepsilon\frac{\tau}{h^2} + c_0\frac{\tau}{h}\right) u_{k-1}^{n+1} + \varepsilon\frac{\tau}{h^2} u_{k+1}^{n+1} + u_k^n \\
&\geq \left(\varepsilon\frac{\tau}{h^2} + c_0\frac{\tau}{h}\right) u_k^{n+1} + \varepsilon\frac{\tau}{h^2} u_k^{n+1} + u_k^n,
\end{aligned}$$

comme $u_{k-1}^{n+1} \geq u_k^{n+1}$ et $u_{k+1}^{n+1} \geq u_k^{n+1}$.

Positivité (2)

Si $u_i^n \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, N$, alors $u_i^{n+1} \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, N$.

Comme

$$\left(1 + 2\varepsilon\frac{\tau}{h^2} + c_0\frac{\tau}{h}\right) u_k^{n+1} \geq \left(\varepsilon\frac{\tau}{h^2} + c_0\frac{\tau}{h}\right) u_k^{n+1} + \varepsilon\frac{\tau}{h^2} u_k^{n+1} + u_k^n,$$

AInsi

$$u_k^{n+1} \geq u_k^n$$

Si $u_j^n \geq 0$, $j = 0, \ldots, N$:

$$0 \leq u_k^n \leq u_k^{n+1} \leq u_j^{n+1} \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, N+1,$$

donc $u_j^{n+1} \geq 0$.

Stabilité

$$\max_{0\leq i\leq N+1} |u_i^{n+1}| \leq \max_{0\leq i\leq N+1} |u_i^n|.$$

$$\min_{0\leq j\leq N+1} u_j^{n+1} = u_k^{n+1} \geq u_k^n \geq \min_{0\leq j\leq N+1} u_j^n.$$

Si on considère k tel que

$$u_k^{n+1} \geq u_j^{n+1} \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, N+1,$$

alors $u_k^{n+1} \leq u_k^n$ et

$$\max_{0\leq j\leq N+1} u_j^{n+1} = u_k^{n+1} \leq u_k^n \leq \max_{0\leq j\leq N+1} u_j^n.$$

Ces inégalités sont appelées principe du minimum et du maximum discrets. Le schéma est donc inconditionnellement stable.

Système linéaire

$$\left(1 + 2\varepsilon\frac{\tau}{h^2} + c_0\frac{\tau}{h}\right) u_i^{n+1} - \left(\varepsilon\frac{\tau}{h^2} + c_0\frac{\tau}{h}\right) u_{i-1}^{n+1} - \varepsilon\frac{\tau}{h^2} u_{i+1}^{n+1} = u_i^n.$$

Ce schéma est implicite. Il nécessite à chaque pas de temps la résolution d'un système linéaire

$$A\vec{u}^{n+1} = \vec{u}^n.$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 + \frac{2\varepsilon\tau}{h^2} + \frac{c_0\tau}{h} & -\frac{\varepsilon\tau}{h^2} & & \\ -\frac{\varepsilon\tau}{h^2} - \frac{c_0\tau}{h} & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -\frac{\varepsilon\tau}{h^2} \\ & & -\frac{\varepsilon\tau}{h^2} - \frac{c_0\tau}{h} & 1 + \frac{2\varepsilon\tau}{h^2} + \frac{c_0\tau}{h} \end{bmatrix}.$$