Analyse numérique

Résolution de systèmes linéaires
Méthodes itératives

Alexandre Caboussat

Problème

Résoudre:

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

où A est une $N \times N$ matrice régulière et $\vec{b}$ est un N-vecteur.

Méthodes directes:

1. élimination de Gauss
2. décomposition LU
3. décomposition de Cholesky

$\Rightarrow$ Nombre d'opérations $\sim N^3$ (si la matrice A est pleine)

Méthodes itératives

Définition

Construire une séquence $\vec{x}^0, \vec{x}^1, \vec{x}^2, \ldots, \vec{x}^n, \ldots$, telle que

$$\lim_{n\to\infty} \|\vec{x} - \vec{x}^n\| = 0.$$

Méthodes de décomposition

Soient K et M des matrices $N \times N$ telles que

$$A = K - M$$

Algorithme itératif

- $\vec{x}^0$ N-vecteur quelconque;
- pour $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

$$\vec{x}^{n+1} = K^{-1} M \vec{x}^n + K^{-1} \vec{b}.$$

Décomposition

Ecrivons A sous la forme

$$A = D - E - F$$

$$A = \begin{bmatrix} \ddots & & & & \\ & \ddots & & -F & \\ & & D & & \\ & -E & & \ddots & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

Méthode de Jacobi

$$K = D \quad \text{et} \quad M = E + F$$

- $K^{-1} = D^{-1} = \text{ diag } (1/a_{11}, 1/a_{22}, 1/a_{33}, \ldots, 1/a_{NN})$
- La matrice

$$J = K^{-1}M = D^{-1}(E + F)$$

est appelée matrice de Jacobi.

Méthode de Gauss-Seidel

$$K = D - E \quad \text{et} \quad M = F$$

- La méthode s'écrit:

$$(D - E)\vec{x}^{n+1} = F\vec{x}^{n} + \vec{b}$$

  (système triangulaire inférieur)

- La matrice

$$G = K^{-1}M = (D - E)^{-1}F$$

  est appelée matrice de Gauss-Seidel.

- La méthode de Gauss-Seidel devrait être plus performante que la méthode de Jacobi puisqu'on tient compte, au fur et à mesure, des valeurs x_i^{n+1} déjà calculées.

Convergence

Définition

Nous dirons que la méthode itérative

$$\vec{x}^{n+1} = K^{-1}M\vec{x}^n + K^{-1}\vec{b}.$$

est convergente si $\lim_{n\to\infty} \|\vec{x} - \vec{x}^n\| = 0$ pour tout $\vec{b}$ et pour tout $\vec{x}^0$.

Rayon spectral

Définition

Soit B est une $N \times N$ matrice de valeurs propres complexes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$.
Le rayon spectral de B est défini par

$$\rho(B) = \max_{1 \leq j \leq N} |\lambda_j|,$$

où $|\lambda_j|$ est le module (complexe) de λ_j, $1 \leq j \leq N$.

Théorème

La méthode itérative $\vec{x}^{n+1} = K^{-1} M \vec{x}^n + K^{-1} \vec{b}$ est convergente si et seulement si $\rho(K^{-1} M) < 1$.

Convergence de la méthode de Gauss-Seidel

Théorème

Si A est une matrice symétrique définie positive, alors la méthode de Gauss-Seidel est convergente.

i.e.

$$\rho(G) < 1$$

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{symétrique définie positive}$$

Vitesse de convergence

$\rho(J)$ est une mesure de la vitesse de convergence de la méthode itérative de Jacobi.

$$\rho(J) \simeq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \text{vitesse est très lente}$$

On peut montrer qu'il existe C indépendante de N telle que

$$|1 - \rho(J)| \leq C \frac{1}{N^2}, \qquad \forall N > 1.$$

Plus N est grand, et plus $\rho(J)$ est proche de 1 (en restant toujours strictement inférieur à 1). La méthode de Jacobi converge très lentement lorsque N est grand...

Exemple

Méthode de Gauss-Seidel

Comme $G = (D - E)^{-1} F$, on peut montrer que

$$\rho(G) = \rho(J)^2.$$

Méthodes de relaxation

Soit A une $N \times N$ matrice régulière with $a_{ii} \neq 0$, $1 \leq i \leq N$.

$$A = D - E - F.$$

Si $\omega \neq 0$:

$$A = \frac{1}{\omega} D - E - \left(\frac{1-\omega}{\omega} D + F \right),$$

Posons

$$\begin{aligned} K &= \omega^{-1} D - E \\ M &= \omega^{-1} (1-\omega) D + F \\ A &= K - M \end{aligned}$$

Définition

La méthode itérative

$$\left(\frac{1}{\omega}D - E\right)\vec{x}^{n+1} = \left(\frac{1-\omega}{\omega}D + F\right)\vec{x}^{n} + \vec{b}.$$

Cette méthode est appelée méthode de relaxation nécessite la résolution d'un système triangulaire (comme la méthode de Gauss-Seidel)

- $\omega = 1$: méthode de Gauss-Seidel
- $\omega < 1$ sous-relaxation
- $\omega > 1$ sur-relaxation

Théorème

Définissons la matrice de la méthode itérative

$$G_\omega = \left(\frac{1}{\omega}D - E\right)^{-1}\left(\frac{1-\omega}{\omega}D + F\right).$$

Si A est une matrice tridiagonale définie positive, alors la méthode de Jacobi et la méthode de relaxation sont convergentes lorsque $0 < \omega < 2$. De plus, il existe un et un seul paramètre de relaxation optimal ω_{opt} égal à

$$\omega_{opt} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(J)^2}},$$

où $\rho(J)$ est le rayon spectral de la matrice J de la méthode de Jacobi.

Méthode SSOR

Alternance E et F:

$$\left(\frac{1}{\omega}D - E\right)\vec{y}^n = \left(\frac{1-\omega}{\omega}D + F\right)\vec{x}^n + \vec{b},$$
$$\left(\frac{1}{\omega}D - F\right)\vec{x}^{n+1} = \left(\frac{1-\omega}{\omega}D + E\right)\vec{y}^n + \vec{b},$$

Méthode SSOR (symmetric successive overrelaxation)

Méthodes du gradient et du gradient conjugué

Supposons A est symétrique définie positive et résolvons $A\vec{x} = \vec{b}$.

Définition

$\mathcal{L} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$:

$$\mathcal{L}(\vec{y}) = \frac{1}{2}\vec{y}^T A\vec{y} - \vec{b}^T\vec{y}.$$

Théorème

Si A est une $N \times N$ matrice symétrique définie positive et si $\vec{x}$ est solution de $A\vec{x} = \vec{b}$ alors, pour tout N-vecteur $\vec{y}$ différent de $\vec{x}$, on a :

$$\mathcal{L}(\vec{x}) < \mathcal{L}(\vec{y}).$$

Démonstration

Soit $\vec{x}$ tel que $A\vec{x} = \vec{b}$ et soit $\vec{y} \neq \vec{x}$.

$$\mathcal{L}(\vec{y}) =$$

Méthode de descente

Méthode itérative

Soit $\vec{x}^0$ donné. Calculer $\vec{x}^{n+1}$ tel que

$$\mathcal{L}(\vec{x}^{n+1}) < \mathcal{L}(\vec{x}^n), \quad n = 0, 1, \ldots$$

Idée: Choisir $\vec{w}^{n+1} \neq \vec{0}$. Ensuite, poser:

$$\vec{x}^{n+1} = \vec{x}^n + \alpha^{n+1}\vec{w}^{n+1}$$

où $\alpha^{n+1} \in \mathbb{R}$ minimise la quantité $f(\alpha)$ définie par

$$f(\alpha) = \mathcal{L}\left(\vec{x}^n + \alpha\vec{w}^{n+1}\right).$$

Le vecteur $\vec{w}^{n+1}$ est appelé direction de descente.

Illustration

Calcul de α^{n+1}

Le paramètre α^{n+1} tel que $f(\alpha^{n+1}) \leq f(\alpha), \forall \alpha \in \mathbb{R}$ est tel que $f'(\alpha) = 0$.

$$f(\alpha) = \mathcal{L}\left(\vec{x}^n + \alpha \vec{w}^{n+1}\right), \quad \mathcal{L}(\vec{y}) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} y_i y_j - \sum_{i=1}^{N} b_i y_i$$

Donc:

$$\begin{aligned} f'(\alpha) &= \sum_{i=1}^{N} w_i^{n+1} \frac{\partial}{\partial y_i} \mathcal{L}(\vec{x}^n + \alpha \vec{w}^{n+1}) = \sum_{i=1}^{N} w_i^{n+1} \left(\sum_{j=1}^{N} a_{ij} \left(x_j^n + \alpha w_j^{n+1} \right) - b_i \right) \\ &= (\vec{w}^{n+1})^T \left(A \left(\vec{x}^n + \alpha \vec{w}^{n+1} \right) - \vec{b} \right). \end{aligned}$$

$$\alpha^{n+1} = \frac{(\vec{w}^{n+1})^T \left(\vec{b} - A\vec{x}^n\right)}{(\vec{w}^{n+1})^T A\vec{w}^{n+1}}.$$

Définition

$$\vec{r}^n := \vec{b} - A\vec{x}^n$$

est le résidu à l'étape n.

Algorithme

For $n = 0, 1, 2, \dots$

- Choisir une direction de descente $\vec{w}^{n+1}$;
- Calculer $\alpha^{n+1} = \dfrac{(\vec{w}^{n+1})^T \vec{r}^n}{(\vec{w}^{n+1})^T A \vec{w}^{n+1}}$.
- Calculer $\vec{x}^{n+1} = \vec{x}^n + \alpha^{n+1} \vec{w}^{n+1}$.

$\Rightarrow$ Choix de la direction de descente ?

Méthode du gradient

$$\vec{w}^{n+1} = \vec{\text{grad}}\ \mathcal{L}(\vec{x}^n).$$

$$\vec{w}^{n+1} = \vec{\text{grad}}\ \mathcal{L}(\vec{x}^n) = A\vec{x}^n - \vec{b} = -\vec{r}^n.$$

Algorithme

- Choisir $\vec{x}^0$ et calculer $\vec{r}^0 = \vec{b} - A\vec{x}^0$;
- Pour $n = 0, 1, 2, \ldots$, calculer:

$$
\begin{aligned}
\vec{z}^{n+1} &= -A\vec{r}^n, \\
\alpha^{n+1} &= \frac{\|\vec{r}^n\|^2}{(\vec{r}^n)^T \vec{z}^{n+1}}, \\
\vec{x}^{n+1} &= \vec{x}^n - \alpha^{n+1}\vec{r}^n, \\
\vec{r}^{n+1} &= \vec{r}^n - \alpha^{n+1}\vec{z}^{n+1},
\end{aligned}
$$

- Si $\vec{r}^{n+1} = 0$ STOP.

Résultat

Théorème

Si A est une matrice symétrique définie positive, alors la méthode du gradient converge.

Problèmes:

1. Convergence lente
2. Convergence perdue à cause des erreurs d'arrondis.

Méthode du gradient conjugué

$$\vec{w}^{n+1} = -\vec{r}^n + \beta^n \vec{w}^n,$$

Rationale:

- Correction de la direction $-\vec{r}^n$.
- β^n calculé afin de minimiser l'erreur entre $\vec{x}$ et $\vec{x}^{n+1}$
- Sans entrer dans les détails, on peut montrer

$$\beta^n = \frac{(\vec{r}^n)^T A \vec{w}^n}{(\vec{w}^n)^T A \vec{w}^n}.$$

Algorithme

- Choisir $\vec{x}^0$ et calculer $\vec{r}^0 = \vec{b} - A\vec{x}^0$;
- Effectuer une itération avec la méthode du gradient:

$$\vec{w}^1 = -\vec{r}^0, \qquad \vec{z}^1 = A\vec{w}^1, \qquad \alpha^1 = \frac{(\vec{r}^0)^T\vec{w}^1}{(\vec{w}^1)^T\vec{z}^1}, \qquad \vec{x}^1 = \vec{x}^0 + \alpha^1\vec{w}^1.$$

- Pour $n = 0, 1, 2, \ldots$, calculer:

$$\vec{r}^n = \vec{r}^{n-1} - \alpha^n\vec{z}^n,$$

$$\beta^n = \frac{(\vec{r}^n)^T\vec{z}^n}{(\vec{w}^n)^T\vec{z}^n}, \quad \vec{w}^{n+1} = -\vec{r}^n + \beta^n\vec{w}^n,$$

$$\vec{z}^{n+1} = A\vec{w}^{n+1}, \quad \alpha^{n+1} = \frac{(\vec{r}^n)^T\vec{w}^{n+1}}{(\vec{w}^{n+1})^T\vec{z}^{n+1}},$$

$$\vec{x}^{n+1} = \vec{x}^n + \alpha^{n+1}\vec{w}^{n+1}.$$

- Si $\vec{r}^n = 0$ STOP.

Résultat

Théorème

Si A est une $N \times N$ matrice symétrique définie positive, alors la méthode du gradient conjugué fournit la solution $\vec{x}$ en au plus N itérations. Ainsi il existe $n \leq N$ tel que $\vec{r}^n = 0$.