Analyse numérique

Interpolation

Alexandre Caboussat

alexandre.caboussat@epfl.ch

Problème à résoudre

Supposons que l'on veuille chercher un polynôme p de degré $n \geq 0$ qui, pour des valeurs $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n$ distinctes données, prenne les valeurs $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n$:

$$p(t_j) = p_j \qquad \text{pour } 0 \leq j \leq n.$$

Solution:

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n$$

où $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des coefficients à déterminer.

$\Rightarrow$ système de $n+1$ relations pour $n+1$ inconnues:

$$p(t_j) = a_0 + a_1 t_j + a_2 t_j^2 + a_3 t_j^3 + \cdots + a_n t_j^n = p_j, \qquad 0 \leq j \leq n.$$

Sous forme matricielle:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & t_0^3 & \dots & t_0^n \\ 1 & t_1 & t_1^2 & t_1^3 & \dots & t_1^n \\ 1 & t_2 & t_2^2 & t_2^3 & \dots & t_2^n \\ 1 & t_3 & t_3^2 & t_3^3 & \dots & t_3^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 1 & t_n & t_n^2 & t_n^3 & \dots & t_n^n \end{bmatrix}}_{:=T} \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}}_{:=\vec{a}} = \underbrace{\begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}}_{:=\vec{p}},$$

Définition

Nous dirons que T est la matrice de Vandermonde associée aux points t_0, t_1, t_2, ..., t_n.

Problème à résoudre: un système linéaire

$$T\vec{a} = \vec{p}$$

Rappel: Matrice inversible

Une meilleure approche

Problème

Trouver l'interpolant $p(t)$ tel que

$$\begin{aligned} p_k &= 1 \qquad \text{pour un } k \in \{0, \ldots, n\} \text{ donné} \\ p_j &= 0 \qquad j \neq k. \end{aligned}$$

Solution:

$$\varphi_k(t) = \frac{(t-t_0)(t-t_1)\cdots(t-t_{k-1})(t-t_{k+1})\cdots(t-t_n)}{(t_k-t_0)(t_k-t_1)\cdots(t_k-t_{k-1})(t_k-t_{k+1})\cdots(t_k-t_n)}.$$

$$\begin{array}{lll} (i) & \varphi_k \text{ est un polynôme de degré } n, & \\ (ii) & \varphi_k(t_j) = 0 & \text{si } j \neq k, 0 \leq j \leq n, \\ (iii) & \varphi_k(t_k) = 1. & \end{array}$$

Base de $\mathbb{P}_n$

- Les polynômes $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ sont linéairement indépendants.

  En effet si $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont $(n+1)$ nombres réels tels que $\sum_{j=0}^{n} \alpha_j \varphi_j(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, alors pour $t = t_k$ nous obtenons :

$$0 = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \underbrace{\varphi_j(t_k)}_{\substack{0 \text{ si } j \neq k \\ 1 \text{ si } j = k}} = \alpha_k,$$

  et par conséquent tous les α_k, $k = 0, 1, \ldots, n$ sont identiquement nuls.

Base de $\mathbb{P}_n$

- Les polynômes φ_0, φ_1, φ_2, ..., φ_n forment aussi une base de $\mathbb{P}_n$.

  $\mathbb{P}_n$ est un espace vectoriel de dimension $(n+1)$ avec base canonique $1, t, t^2, t^3, \ldots, t^n$. Comme $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ sont des polynômes de degré n linéairement indépendants, ils engendrent également $\mathbb{P}_n$.

Base de Lagrange

Définition

Nous dirons que $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ est la base de Lagrange de $\mathbb{P}_n$ associée aux points $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n$.

Exemple

Lorsque $n = 2$, $t_0 = -1$, $t_1 = 0$, $t_2 = 1$, quelle est la base de Lagrange de $\mathbb{P}_2$ associée aux points -1, 0 et 1 ?

Interpolation de Lagrange

Problème

Chercher un polynôme p de degré n qui prenne des valeurs données $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n$ en des points distincts donnés $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n$.

Solution:

$$p(t) = p_0\varphi_0(t) + p_1\varphi_1(t) + \cdots + p_n\varphi_n(t) = \sum_{j=0}^{n} p_j\varphi_j(t).$$

En effet, on vérifie que

$$p \in \mathbb{P}_n, \qquad \text{et} \;\; p(t_k) = \sum_{j=0}^{n} p_j \underbrace{\varphi_j(t_k)}_{\substack{0 \text{ si } j\neq k \\ 1 \text{ si } j=k}} = p_k$$

Remarque

Il existe une solution explicite pour n'importe quelles valeurs $p_0, p_1, \ldots, p_n$.

$\Downarrow$

Le système linéaire $T\vec{a} = \vec{p}$ admet toujours une solution.

$\Downarrow$

La matrice de Vandermonde T est inversible.

$\Downarrow$

La solution est unique!

Exemple

Trouver un polynôme de degré 2 tel que

$$p(-1) = 8, \quad p(0) = 3, \quad p(1) = 6$$

Interpolation d'une fonction continue

Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue donnée et soit t_0, t_1, t_2, ..., t_n, $(n+1)$ points distincts donnés. Nous voulons interpoler f par un polynôme p de degré n, i.e.

$$p(t_j) = f(t_j) \qquad \text{pour } 0 \leq j \leq n.$$

Solution:

$$p(t) = \sum_{j=0}^{n} f(t_j)\varphi_j(t) \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

p est l'interpolant de f de degré n aux points $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n$.

Exemple

Soit f la fonction définie par $f(t) = e^t$. Trouver l'interpolant de f de degré 2 aux points -1, 0 et 1.

Quelle erreur?

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t_j = a + jh$, $j = 0, 1, 2, \ldots, n$, $h = (b-a)/n$.

Soit p_n l'interpolant de f de degré n aux points $t_0, t_1, \ldots, t_n$:

$$p_n(t) = \sum_{j=0}^{n} f(t_j)\varphi_j(t),$$

Théorème

Supposons que f soit $(n+1)$ fois continûment dérivable sur l'intervalle $[a, b]$, et p_n l'interpolant de Lagrange; nous avons :

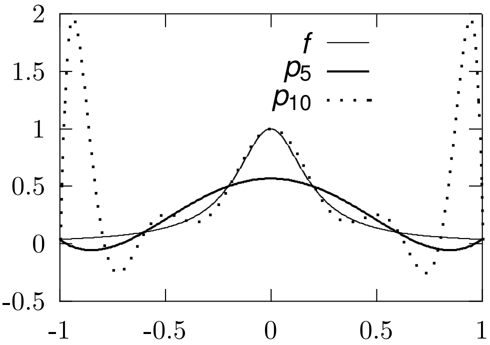
$$\max_{t\in[a,b]} |f(t) - p_n(t)| \leq \frac{1}{2(n+1)} \left(\frac{b-a}{n}\right)^{(n+1)} \max_{t\in[a,b]} |f^{(n+1)}(t)|$$

où $f^{(n+1)}(t) = d^{n+1} f(t)/dt^{n+1}$.

Exemple de Runge

$$f(t) = \frac{1}{1+25t^2} \quad \text{sur} \quad [-1, +1].$$

$t_j = -1 + 2j/n$, $j = 0, 1, \ldots, n$.



Conclusions

- La fonction $f(t)$ est infiniment dérivable mais $|f^{(n)}(1)|$ est très grand lorsque n augmente.
- L'interpolant présente de grandes oscillations vers $x = \pm 1$.
- Pas un bon choix d'avoir des points $t_0, t_1, \ldots, t_n$ équidistribués.
- Lorsque n devient grand:
  - Instabilités possibles.
  - Fonction f doit être régulière.
- Interpolation par intervalles

Interpolation par intervalles

- $f \in C^0([a, b])$, $x_0 = a < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_N = b$
- Dans chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$:

$$t_0 = x_i, \quad t_j = x_{i,j},\ 1 \leq j \leq n-1, \quad t_n = x_{i+1}$$

où $x_{i,j}$ sont $n-1$ points intérieurs équirépartis notés

$$x_{i,1} < x_{i,2} < x_{i,3} < \ldots < x_{i,n-1}.$$

Interpolation par intervalles (2)

- Interpoler f aux points t_j, $0 \leq j \leq n$, par un polynôme de degré n, $p_{n,i}$.
- Définir $h = \max_{0 \leq i \leq N-1} |x_{i+1} - x_i|$.
- Construire

$$f_h : x \in [a, b] \longrightarrow f_h(x) \in \mathbb{R}$$

telle que f_h restreinte à $[x_i, x_{i+1}]$ est égale à $p_{n,i}$

f_h est l'interpolant de degré n par intervalles de la fonction f.

Théorème

Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction $C^{n+1}([a, b])$ et soit f_h son interpolant de degré n par intervalles.

Alors il existe une constante C (indépendante du choix des x_i, $1 \leq i \leq N - 1$) telle que

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x) - f_h(x)| \leq Ch^{n+1}.$$

Démonstration (1)

$(n = 1)$

Démonstration (2)

Démonstration (3)

Interprétation

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x) - f_h(x)| \to 0$$

lorsque h tend vers zéro.

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x) - f_h(x)| \leq Ch^{n+1}.$$

En pratique, on prendra N grand et n petit ($n = 1$ ou 2 ou 3 ou 4).