Analyse numérique

Equations et systèmes d'équations non linéaires

Alexandre Caboussat

Equations non linéaires

Problème

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Résoudre:

$$f(\bar{x}) = 0$$

Approche:

- Trouver une première approximation x_0;
- Construire, à partir de x_0, une suite $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$, telle que

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \bar{x}$$

- On dit alors que la méthode est convergente.

Méthode de la bissection

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ telles que $f(\alpha)f(\beta) < 0$. Il existe au moins un zéro de f entre α et β.

Algorithme:

- Poser $x_0 = (\alpha + \beta)/2$. Si $f(x_0) = 0$ STOP.
- si $f(x_0)f(\alpha) > 0$ alors $\alpha := x_0$;
- si $f(x_0)f(\alpha) < 0$ alors $\beta := x_0$;
- Poser $x_1 = (\alpha + \beta)/2$;
- REPEAT

Si $\varepsilon = |\beta - \alpha|$, on a

$$|\bar{x} - x_M| \leq \frac{\varepsilon}{2^{M+1}}$$

La méthode est donc convergente.

Définition

Soit p un entier positif. Une méthode convergente est d'ordre p si $\exists C > 0$ telle que

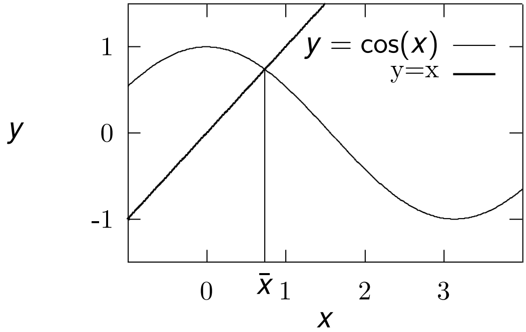
$$|\bar{x} - x_{n+1}| \leq C|\bar{x} - x_n|^p.$$

- Si $p = 1$ (et $C < 1$): convergence linéaire
- Si $p = 2$: convergence quadratique
- Si $p = 3$: convergence cubique
- Si $p = 1$ et $C = C_n$, où $\lim_{n\to\infty} C_n = 0$: convergence surlinéaire

Exemple

$f(x) = x - \cos x$

$$f(\bar{x}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \bar{x} = \cos \bar{x}.$$



Algorithme

On pose

$$x_{n+1} = \cos x_n, \qquad n = 0, 1, 2, \dots,$$

Théorème

Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, la suite converge vers $\bar{x}$. De plus la convergence est linéaire.

Méthode de point fixe

Définition

Une méthode de point fixe pour résoudre numériquement $f(x) = 0$ consiste à transformer $f(x) = 0$ en

$$x = g(x).$$

Méthode de Picard

- Choisir une approximation x_0 du point fixe $\bar{x}$ de g;
- Calculer successivement $x_{n+1} = g(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Objectif:
Obtenir une méthode convergente ($x_n \to x$). Dans ce cas:

$$x = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(x).$$

Définition

Fonction contractante

Soit $I \subset \mathbb{R}$ et $g : x \in I \to g(x) \in \mathbb{R}$.
La fonction g est une contraction stricte sur I si $\exists \chi < 1$ telle que

$$|g(x) - g(y)| \leq \chi |x - y|, \qquad \forall x, y \in I.$$

Théorème

Convergence d'une méthode de point fixe

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle **fermé** et $g : I \to \mathbb{R}$ telle que

(i) g est une contraction stricte sur I,

(ii) $g(I) \subset I$.

Alors g a un et un seul point fixe $\bar{x} \in I$ et, pour tout $x_0 \in I$, la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ donnée par

$$x_{n+1} = g(x_n), \qquad n = 0, 1, 2, \dots,$$

converge vers $\bar{x}$ lorsque n tend vers l'infini. De plus la convergence est linéaire.

Démonstration (1)

Démonstration (2)

Démonstration (3)

Exemple

$g(x) = \cos x$, $I = [0,1]$

Pour tout $x, y \in I$:

$$|g(x) - g(y)| = |\cos x - \cos y| = \left| \int_x^y \sin t dt \right| \leq \max_{t \in [0,1]} |\sin t| \cdot |x - y|.$$

Posons

$$\chi = \max_{t \in [0,1]} |\sin t| < 1$$

Donc : existence d'un seul point fixe $\bar{x} \in I$ et convergence de la suite $x_{n+1} = \cos x_n$, pour tout $x_0 \in [0,1]$.

Théorème

Convergence d'une méthode de point fixe

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle **fermé** et $g : I \to \mathbb{R}$ telle que

(i) g est continûment dérivable ($C^1(I)$) ,

(ii) $\bar{x} = g(\bar{x})$, with $|g'(\bar{x})| < 1$

Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que si $|\bar{x} - x_0| \leq \varepsilon$, alors la suite

$$x_{n+1} = g(x_n), \qquad n = 0, 1, 2, \dots,$$

converge vers $\bar{x}$ lorsque n tend vers l'infini. De plus la convergence est linéaire.

Démonstration

Méthode de Newton

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continûment dérivable et soit $\bar{x}$ un zéro simple de f, (i.e. $f(\bar{x}) = 0$, $f'(\bar{x}) \neq 0$).

Sketch:

Algorithme

Relation:

$$\frac{f(x_n)}{(x_n - x_{n+1})} = f'(x_n)$$

x_0 proche de $\bar{x}$;

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

$$g'(x) =$$

et, comme $f(\bar{x}) = 0$, $f'(\bar{x}) \neq 0$

$$g'(\bar{x}) =$$

Donc $g \in C^2(I)$.

Théorème

Supposons $f \in C^2(I)$ et $\bar{x}$ tel que $f(\bar{x}) = 0$ et $f'(\bar{x}) \neq 0$.
Alors $\exists \varepsilon > 0$ tel que, si $|\bar{x} - x_0| \leq \varepsilon$, la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ donnée par la méthode de Newton converge vers $\bar{x}$. De plus la convergence est quadratique.

Démonstration (1)

- La méthode de Newton est une méthode de point fixe avec

$$g(x) = x - f(x)/f'(x), \qquad |g'(\bar{x})| < 1$$

- La méthode converge et la convergence est linéaire (cf. résultat précédent)
- En fait, la convergence est quadratique! On a

$$g'(\bar{x}) = 0$$

- Formule de Taylor:

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{f''(\xi_x)}{2}(x - x_n)^2, \qquad \xi_x \in [x, x_n]$$

- Avec $x = \bar{x}$:

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + \bar{x} - x_n + \frac{f''(\xi_{\bar{x}})}{2f'(x_n)}(\bar{x} - x_n)^2 = 0.$$

Démonstration (2)

Démonstration (3)

- Donc

$$|\bar{x} - x_{n+1}| = \frac{|f''(\xi_{\bar{x}})|}{2|f'(x_n)|}|\bar{x} - x_n|^2.$$

- On pose

$$C = \frac{\max\limits_{x \in [\bar{x}-\varepsilon, \bar{x}+\varepsilon]} |f''(x)|}{2 \min\limits_{x \in [\bar{x}-\varepsilon, \bar{x}+\varepsilon]} |f'(x)|}$$

  pour obtenir :

$$|\bar{x} - x_{n+1}| \leq C|\bar{x} - x_n|^2.$$

Méthode de la corde (ou Newton-corde)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Théorème

Posons

$$g(x) = x - f(x)/f'(x_0)$$

On a

$$f(\bar{x}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \bar{x} = g(\bar{x})$$

Ainsi la méthode de la corde s'écrit $x_{n+1} = g(x_n)$ et est une méthode de point fixe.

Théorème

Supposons $f \in C^1(I)$ et $\bar{x}$ tel que $f(\bar{x}) = 0$ et $f'(\bar{x}) \neq 0$.
Alors $\exists \varepsilon > 0$ tel que, si $|\bar{x} - x_0| \leq \varepsilon$, la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ donnée par la méthode de la corde converge vers $\bar{x}$. De plus la convergence est linéaire.

Systèmes non linéaires

Soit $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ (N entier positif); on cherche $\bar{x}$ tel que $f(\bar{x}) = 0$.

$f(x) \in \mathbb{R}^N$ est un N-vecteur.

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_N(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_N) \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_N) \\ \vdots \\ f_N(x_1, x_2, \ldots, x_N) \end{bmatrix}.$$

Systèmes non linéaires

L'équation

$$f(x) = 0$$

est un système de N équations à N inconnues x_1, x_2, ..., x_N

$$\begin{aligned}
f_1(x_1, x_2, \ldots, x_N) &= 0 \\
f_2(x_1, x_2, \ldots, x_N) &= 0 \\
&\vdots \\
f_N(x_1, x_2, \ldots, x_N) &= 0
\end{aligned}$$

Définition

Matrice Jacobienne

$$Df(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_N}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_N}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_N}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_N}{\partial x_N}(x) \end{bmatrix};$$

Coefficients de la matrice $Df(x)$:

$$Df(x)_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x), \qquad 1 \leq i, j \leq N.$$

Méthode de Newton

Généralisation aux systèmes non linéaires

$$x^{n+1} = x^n - Df(x^n)^{-1} f(x^n), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

(x^0 proche de $\bar{x}$, solution de $f(\bar{x}) = 0$).

Convergence

Soit $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ par

$$g(x) = x - Df(x)^{-1} f(x),$$

- Si $f(\bar{x}) = 0$ et si $Df(\bar{x})$ est une matrice régulière, alors

$$\bar{x} = g(\bar{x}).$$

- Remplacer I par un ensemble fermé, les valeurs absolues $|\cdot|$ par la **norme euclidienne** $\|\cdot\|$, et la valeur absolue de $g'(\bar{x})$ par la **norme spectrale** de $Dg(\bar{x})$.
- La suite $(x^n)_{n=0}^{\infty}$ définie par la méthode de Newton converge vers $\bar{x}$ (si x^0 est proche de $\bar{x}$). Si $\|x^0 - \bar{x}\|$ est suffisamment petite, alors

$$\lim_{n\to\infty} \|x^n - \bar{x}\| = 0.$$

- La convergence est quadratique:

$$\| x^{n+1} - \bar{x} \| \leq C \| x^n - \bar{x} \|^2, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Algorithme

Calculer x^{n+1} à partir de x^n:

$$Df(x^n)(x^n - x^{n+1}) = f(x^n), \qquad n = 0, 1, 2, \dots,$$

- Construire $\vec{b} = f(x^n)$;
- Construire $A = Df(x^n)$;
- Résoudre

$$A\vec{y} = \vec{b}$$

  (élimination de Gauss, LU, LL^T, etc...)
- Poser

$$x^{n+1} = x^n - \vec{y}.$$

Inconvénient ?

$$Df(x^n)(x^n - x^{n+1}) = f(x^n), \qquad n = 0, 1, 2, \dots,$$

Construire $Df(x^n)$ à chaque itération! puis résoudre le système linéaire.

Algorithme (Méthode de Newton-Corde)

$$x^{n+1} = x^n - Df(x^0)^{-1} f(x^n), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

- Construire $A = Df(x^0)$
- Effectuer la décomposition $A = LU$ or $A = LL^T$ une fois pour toutes!

A chaque itération:

- Construire $\vec{b} = f(x^n)$;
- Résoudre $L\vec{z} = \vec{b}$;
- Résoudre $U\vec{y} = \vec{z}$;
- Poser

$$x^{n+1} = x^n - \vec{y}.$$

Conclusion

- **Avantage:** deux systèmes linéaires triangulaires
- **Inconvénient:** plus d'itérations avec la méthode de la corde qu'avec la méthode de Newton !