Alexandre Caboussat

Série 12

Exercice 1

Soient c_0 une constante positive donnée et $w : x \in \mathbb{R} \mapsto w(x) \in \mathbb{R}$ une fonction continue donnée telle que $w(x) = 0$, $x \leqslant 0$. On considère l'équation de transport :

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) + c_0 \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0, & \forall\, x \in [0,1],\ \forall\, t > 0, \\ u(x,0) = w(x), & \forall\, x \in [0,1], \\ u(0,t) = 0, & \forall\, t > 0. \end{cases}$$

1.a) Vérifiez que la solution de $(\mathcal{P})$ est donnée par

$$u(x,t) \ = \ w(x - c_0 t), \qquad \forall\, x \in [0,1],\ \forall\, t > 0.$$

1.b) Soient N un entier positif, $h = 1/(N+1)$ le pas d'espace et τ le pas de temps. On veut calculer des approximations u_j^n de $u(x_j, t_n)$, où $x_j = jh$, $j = 0, 1, 2, \ldots, N+1$ et $t_n = n\tau$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Etablir le schéma d'approximation du problème $(\mathcal{P})$ en utilisant une méthode d'Euler progressive et une méthode de différences finies **décentrées** en espace.

1.c) Le fichier `transport.m` est à votre disposition sur `Noto`/`Moodle`. Le programme `transport.m` permet de résoudre le problème hyperbolique en utilisant ce **schéma d'Euler progressif.** Compléter le fichier.

1.d) Vérifier numériquement que le schéma est stable si $\tau \leqslant \frac{h}{c_0}$. Pour ce faire, considérer le cas particulier où $c_0 = \frac{1}{2}$ et où la fonction w est définie par

$$w(x) = \begin{cases} e^{-\frac{(x-0.3)^2}{(x-0.1)^2}} & \text{si } x \in (0.1, 0.3), \\ e^{-\frac{(x-0.3)^2}{(x-0.5)^2}} & \text{si } x \in (0.3, 0.5), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Que peut-on observer lorsque $\tau = \frac{h}{c_0}$? Que devient le schéma dans ce cas ?

1.e) Vérifier numériquement que le schéma est d'ordre $h + \tau$. Remplir pour ceci le tableau suivant:

h	τ	M	Erreur
0.05	0.08	10	
0.025	0.04	20	
0.0125	0.02	40	
0.00625	0.01	80	
0.003125	0.005	160	
0.0015625	0.0025	320	
0.00078125	0.00125	640	

1.f) Montrer que si $\tau \leqslant \frac{h}{c_0}$ alors on a :

$$\max_{j=0,1,\ldots,N+1} |u_j^{n+1}| \leqslant \max_{j=0,1,\ldots,N+1} |u_j^n|, \qquad \forall\, n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Exercice 2

Soit c_0 une constante positive donnée. On considère l'équation de transport suivante:

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) + c_0 \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) + (1+x)\, u(x,t) = 0, & \forall\, x \in (0,1),\ \forall\, t > 0, \\ u(x,0) = \sin(2\pi x), & \forall\, x \in (0,1), \\ u(0,t) = 0, & \forall\, t > 0. \end{cases}$$

2.a) Soient N un entier positif, $h = 1/(N+1)$ le pas d'espace et τ le pas de temps. On veut calculer des approximations u_j^n de $u(x_j, t_n)$, où $x_j = jh$, $j = 0, 1, 2, \ldots, N+1$ et $t_n = n\tau$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Etablir le schéma d'approximation du problème $(\mathcal{P})$ en utilisant un schéma d'Euler rétrograde en temps et une méthode de différences finies **décentrées** en espace.

2.b) Ecrire le schéma sous la forme $L\vec{u}^{n+1} = \vec{u}^n$, où L est une $N \times N$-matrice triangulaire inférieure et $\vec{u}^n$ le N-vecteur de composantes u_i^n, $i = 1, \ldots, N+1$.

Exercice 3

Soit c_0 une constante positive donnée. On considère l'équation de transport suivante:

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) + c_0 \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0, & \forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, t > 0, \\ u(x,0) = w(x), & \forall\, x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Soient N un entier positif, $h = 1/(N+1)$ le pas d'espace et τ le pas de temps. On veut calculer des approximations u_j^n de $u(x_j, t_n)$, où $x_j = jh$, $j = 0, 1, 2, \ldots, N+1$ et $t_n = n\tau$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

On considère le **schéma de Lax-Friedrichs** pour trouver une approximation de la solution de $(\mathcal{P})$. Il s'écrit:

$$\frac{u_i^{n+1} - \dfrac{u_{i-1}^n + u_{i+1}^n}{2}}{\tau} + c_0 \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h} = 0.$$

3.a) Montrer que ce schéma est consistant et donner l'ordre de consistance.

Indication: Effectuer les développements de Taylor de $u(x_{i+1}, t^n), u(x_{i-1}, t^n), u(x_i, t^{n+1})$ autour de $u(x_i, t^n)$.