EPFL

1

Ens. : ALEXANDRE CABOUSSAT
MATH 251(E) - ANALYSE NUMERIQUE - GM
MERCREDI 26 JUIN 2024
Durée : 180 minutes

Student 1

SCIPER : **999000**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 28 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Tout **objet connecté** est interdit pendant l'épreuve.
- L'examen contient un total de **47 points.**
- Il y a 23 questions à choix multiple, avec une seule réponse correcte et valant chacune 1 point.
- Il y a deux questions calculatoires, valant chacune 2 points, et 4 questions ouvertes à rédiger, valant chacune 5 points.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  $+1$ point si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  -0.25 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- **Aucune page supplémentaire ne pourra être ajoutée à ce document.**
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse | Correct an answer Antwort korrigieren

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide de auto-multiple-choice.

Première partie: Questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1
On considère le problème suivant: trouver une fonction $u : [0,1] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telle que:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + \alpha u(x,t) = 0 & \forall x \in (0,1),\ \forall t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & \forall t > 0, \\ u(x,0) = \sin(\pi x) & \forall x \in [0,1], \end{cases}$$

où $k, \alpha \in \mathbb{R}_+$. Soit N un entier positif, on note $h = 1/(N+1)$ le pas d'espace, $x_i = ih$, $i = 0, \dots, N+1$. Soit τ le pas de temps, $t_n = n\tau$, $n = 0, 1, 2, \dots$. On note u_i^n une approximation de $u(x_i, t_n)$ obtenue par une méthode de différences centrées en espace et un schéma d'Euler progressif en temps. Quelle est la condition de stabilité du schéma, qui garantit que la solution numérique reste positive à chaque pas de temps?

- ☐ $\tau \leq \dfrac{h^2}{2k}$
- ☐ $\tau \leq \dfrac{\alpha h^2}{2k}$
- ☐ $\tau \leq \dfrac{h^2}{2k + \alpha}$
- ☐ $\tau \leq \dfrac{h^2}{2k + \alpha h^2}$
- ☐ $\tau \leq \dfrac{h^2}{2k\alpha}$

Question 2
On considère l'équation différentielle suivante: trouver $u : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) = 2, & t > 0, \\ u(0) = 1, \quad \dot{u}(0) = 0. \end{cases}$$

Soit h le pas de temps, on note $t_n = nh$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Soit u^n l'approximation de $u(t_n)$ obtenue grâce au schéma de Newmark (qui correspond à une méthode de différences finies centrées pour l'approximation de la deuxième dérivée). En supposant que $u^1 = 1$, calculer u^2.

- ☐ $u^2 = h^2 - 1$
- ☐ $u^2 = 4h + 2$
- ☐ $u^2 = 2h^2 + 1$
- ☐ $u^2 = 4h^2 + 1$
- ☐ $u^2 = 3$

Question 3
Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice symétrique définie positive. La méthode du gradient conjugué s'arrête après au plus:

- ☐ n^2 itérations
- ☐ $\log(n)n$ itérations
- ☐ $\log(n)$ itérations
- ☐ n itérations
- ☐ $\sqrt{n}$ itérations

Question 4
On considère l'équation de transport suivante: trouver $u : [0,1] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0, & \forall\, x \in [0,1],\ \forall\, t > 0, \\ u(x,0) = w(x), & \forall\, x \in [0,1]. \end{cases}$$

Quelles sont les conditions aux limites adéquates à ajouter à ce problème?

- ☐ $u(0,t) = u(1,t) = 0$.
- ☐ $u(0,t) = 0$.
- ☐ $\dfrac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0$.
- ☐ Aucunes conditions aux limites ne sont nécessaires.
- ☐ $u(1,t) = 0$.

Question 5 Pour toute fonction $g \in C^0([-1,1])$, on définit la formule de quadrature suivante:

$$J(g) = \omega_1 g(-1) + \omega_2 g(1/2)$$

pour approcher $\displaystyle\int_{-1}^{1} g(t)dt$. La formule de quadrature est exacte pour les polynômes de degré un si et seulement si les poids ω_1 et ω_2 sont donnés par:

- ☐ $\omega_1 = \frac{1}{2}, \quad \omega_2 = \frac{3}{2}$
- ☐ $\omega_1 = 2, \quad \omega_2 = 0$
- ☐ $\omega_1 = \frac{2}{3}, \quad \omega_2 = \frac{4}{3}$
- ☐ $\omega_1 = \frac{4}{5}, \quad \omega_2 = \frac{1}{5}$
- ☐ $\omega_1 = 1, \quad \omega_2 = 1$

Question 6
On considère le problème de Poisson en deux dimensions: trouver $u : \Omega = (0,1)^2 \to \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) + 5u(x,y) = 1 & (x,y) \in \Omega, \\ u(x,y) = 0 & (x,y) \in \partial\Omega, \end{cases}$$

que l'on discrétise en utilisant la méthode de différences finies centrées. Soit N un entier positif, $h = 1/(N+1)$, $x_i = ih$, $y_j = jh$, $i,j = 0,1,\ldots,N+1$. On note $u_{i,j}$ une approximation de $u(x_i,y_j)$, $i,j = 0,\ldots,N+1$. Quel est le schéma correspondant?

☐

$$\begin{aligned} &\frac{4u_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i-1,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{h^2} + \frac{5}{h^2}u_{i,j} = 1 \qquad 1 \le i,j \le N, \\ &u_{i,0} = u_{i,N+1} = 0 \qquad 0 \le i \le N+1 \\ &u_{0,j} = u_{N+1,j} = 0 \qquad 0 \le j \le N+1. \end{aligned}$$

☐

$$\begin{aligned} &\frac{9u_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i-1,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{h^2} = 1 \qquad 1 \le i,j \le N, \\ &u_{i,0} = u_{i,N+1} = 0 \qquad 0 \le i \le N+1 \\ &u_{0,j} = u_{N+1,j} = 0 \qquad 0 \le j \le N+1. \end{aligned}$$

☐

$$\begin{aligned} &\frac{(4+h^2)u_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i-1,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{h^2} = 1 \qquad 1 \le i,j \le N, \\ &u_{i,0} = u_{i,N+1} = 0 \qquad 0 \le i \le N+1 \\ &u_{0,j} = u_{N+1,j} = 0 \qquad 0 \le j \le N+1. \end{aligned}$$

☐

$$\begin{aligned} &\frac{6u_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i-1,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{h^2} + 5u_{i,j} = 1 \qquad 1 \le i,j \le N, \\ &u_{i,0} = u_{i,N+1} = 0 \qquad 0 \le i \le N+1 \\ &u_{0,j} = u_{N+1,j} = 0 \qquad 0 \le j \le N+1. \end{aligned}$$

☐

$$\begin{aligned} &\frac{4u_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i-1,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{h^2} + 5u_{i,j} = 1 \qquad 1 \le i,j \le N, \\ &u_{i,0} = u_{i,N+1} = 0 \qquad 0 \le i \le N+1 \\ &u_{0,j} = u_{N+1,j} = 0 \qquad 0 \le j \le N+1. \end{aligned}$$

Question 7

Soit la matrice A définie par $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$,

Considérons la méthode de décomposition de Gauss-Seidel, pour laquelle on écrit $A = K - M$ où K est la partie triangulaire inférieure de A. Soit $G = K^{-1}M$ la matrice de Gauss-Seidel. Alors le rayon spectral de la matrice G est donné par

- ☐ $\rho(G) = \frac{1}{64}$
- ☐ $\rho(G) = \frac{1}{16}$
- ☐ $\rho(G) = \frac{1}{36}$
- ☐ $\rho(G) = \frac{1}{4}$
- ☐ $\rho(G) = 1$

Question 8 Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ telle que $f(0)f(1) < 0$, et soit $\bar{x} \in [0, 1]$ tel que $f(\bar{x}) = 0$. On considère la méthode de la bissection pour construire une suite $(x_m)_{m\geq 0}$ qui converge vers $\bar{x}$. Laquelle des affirmations suivantes est fausse?

- ☐ $$|x_m - \bar{x}| \leq \frac{1}{2}$$
- ☐ $$\lim_{m\to\infty} x_m = \bar{x}$$
- ☐ $$|x_m - \bar{x}| \leq \frac{1}{2^{m+2}}$$
- ☐ La convergence de la méthode de la bissection est linéaire.
- ☐ $$|x_m - \bar{x}| \leq \frac{1}{2^{m+1}}$$

Question 9

On considère l'équation de transport suivante: trouver $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) + u(x,t) = 0, & \forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, t > 0, \\ u(x,0) = \sin(\pi x), & \forall\, x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

Soient h le pas d'espace et τ le pas de temps. On veut calculer des approximations u_j^n de $u(x_j, t_n)$, où $x_j = jh$, $j \in \mathbb{Z}$ et $t_n = n\tau$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. On établit le schéma numérique utilisant un schéma d'Euler progressif en temps et une méthode de différences finies décentrées en espace. Ce schéma s'écrit de la manière suivante:

- ☐ $u_i^{n+1} = \left(1 - \frac{\tau}{h} - \tau\right) u_i^n + \frac{\tau}{h} u_{i-1}^n.$
- ☐ $u_i^{n+1} = \left(1 - \frac{\tau}{h} - \tau\right) u_i^n + \frac{\tau}{h} u_{i+1}^n.$
- ☐ $u_i^{n+1} = \left(1 + \frac{\tau}{h} - \tau\right) u_i^n - \frac{\tau}{h} u_{i+1}^n.$
- ☐ $u_i^{n+1} = (1 - \tau)\, u_i^n - \frac{\tau}{2h}\left(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n\right).$
- ☐ $u_i^{n+1} = \left(1 + \frac{\tau}{h} - \tau\right) u_i^n - \frac{\tau}{h} u_{i-1}^n.$

Question 10
On considère l'équation différentielle suivante: trouver $u : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = -3u(t) + \cos(u(t)), \qquad t > 0, \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

Soit $h = 1$ le pas de temps, on note $t_n = n$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Soit u^n l'approximation de $u(t_n)$ obtenue grâce à un schéma d'Euler rétrograde. Calculer u^1 en effectuant un pas de la méthode de Newton.

- ☐ $u^1 = -\frac{1}{2}$
- ☐ $u^1 = -\frac{1}{4}$
- ☐ $u^1 = \frac{1}{3}$
- ☐ $u^1 = 1$
- ☐ $u^1 = \frac{1}{4}$

Question 11 On considère le problème suivant : trouver $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} -u''(x) + u^3(x) = 1, \quad 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Soit N un entier positif, $h = 1/(N+1)$, $x_i = ih$, $i = 0, 1 \dots, N+1$. On note u_i une approximation de $u(x_i)$, $i = 0, \dots, N+1$. Soit $V = \{v : [0,1] \to \mathbb{R} \ : \ v \text{ continue }, v' \text{ continue par morceaux }, v(0) = 0, \ v(1) = 0\}$. Quelle est le problème faible correspondant?

- ☐ Trouver $u \in V$ telle que $\int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 u^3(x)v(x)dx = \int_0^1 v(x)dx$, pour tout $v \in V$
- ☐ Trouver $u \in V$ telle que $\int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 u^3(x)v^3(x)dx = \int_0^1 v(x)dx$, pour tout $v \in V$
- ☐ Trouver $u \in V$ telle que $\int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \left(\int_0^1 u(x)v(x)dx\right)^3 = \int_0^1 v(x)dx$, pour tout $v \in V$
- ☐ Trouver $u \in V$ telle que $\int_0^1 u'(x)v'(x)dx + 3\int_0^1 u^2(x)v(x)dx = \int_0^1 v(x)dx$, pour tout $v \in V$
- ☐ Trouver $u \in V$ telle que $\int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 u(x)v(x)dx = \int_0^1 v(x)dx$, pour tout $v \in V$

Question 12

Soit la matrice A définie par $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

On effectue la décomposition de Cholesky de A en $A = LL^T$. Expliciter la matrice L.

- [ ] $$L = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$
- [ ] $$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

.

- [ ] $$L = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & \sqrt{3/2} \end{pmatrix}.$$
- [ ] $$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
- [ ] $$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Question 13

Un programme Matlab permet de trouver une approximation de la solution d'un problème en temps et en espace. Le tableau suivant contient les valeurs de l'erreur à un certain temps T en fonction du pas d'espace $h > 0$ et du pas de temps $\tau > 0$.

h	τ	Erreur
0.2	0.5	1.3456e-07
0.05	0.25	3.5268e-08
0.0125	0.125	8.3159e-09
0.003125	0.0625	2.0351e-09

Sur la base de ces résultats, laquelle des affirmations suivantes est-elle correcte?

- [ ] L'erreur est approximativement divisée par quatre lorsque h est divisé par deux et τ est divisé par deux.
- [ ] L'erreur est approximativement divisée par quatre lorsque h est divisé par quatre et τ est divisé par deux.
- [ ] L'erreur est approximativement divisée par deux lorsque h est divisé par quatre et τ est divisé par quatre.
- [ ] L'erreur est approximativement divisée par deux lorsque h est divisé par deux et τ est divisé par deux.
- [ ] L'erreur est d'ordre $O(h + \tau)$.

Question 14

On considère le problème suivant: trouver une fonction $u : [0,1] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telle que:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + u(x,t) = 0 & \forall x \in (0,1),\ \forall t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & \forall t > 0, \\ u(x,0) = \sin(\pi x) & \forall x \in [0,1], \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 & \forall x \in [0,1]. \end{cases}$$

Soit N un entier positif, on note $h = 1/(N+1)$ le pas d'espace, $x_i = ih$, $i = 0, \ldots, N+1$. Soit τ le pas de temps, $t_n = n\tau$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. On note u_i^n une approximation de $u(x_i, t_n)$ obtenue par une méthode de différences centrées en espace et un schéma de Newmark en temps (qui correspond à une méthode de différences finies centrées en temps). On écrit le schéma sous la forme:

$$u_i^{n+1} = \beta_i u_i^n + \gamma_i \left(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n\right) + \delta_i u_i^{n-1}, \quad i = 1, \ldots, N,\ n = 1, 2, \ldots.$$

Que vaut le coefficient β_i?

- ☐ $\beta_i = 2\left(1 - \dfrac{\tau^2}{h^2}\right)$
- ☐ $\beta_i = 2 - \dfrac{2\tau^2}{h^2} - h^2$
- ☐ $\beta_i = 1 - \dfrac{\tau^2}{2h^2} - \tau^2$
- ☐ $\beta_i = 2 - \dfrac{2}{h^2} - \tau^2$
- ☐ $\beta_i = 2 - \dfrac{2\tau^2}{h^2} - \tau^2$

Question 15

On considère le problème suivant : trouver $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = 1, & 0 < x < 1, \\ u'(0) = u'(1) = 0. \end{cases}$$

Soit N un entier positif, $h = 1/(N+1)$, $x_i = ih$, $i = 0, 1 \ldots, N+1$. On note u_i une approximation de $u(x_i)$, $i = 0, \ldots, N+1$. On considère une méthode de différences finies centrées pour approcher les dérivées apparaissant dans l'équation différentielle et dans les conditions aux limites. Le calcul des valeurs u_i conduit à la résolution d'un système linéaire $A\vec{u} = \vec{b}$, où on a noté $\vec{u}$ le vecteur de composantes u_i, $i = 0, \ldots, N+1$. On suppose que $N = 2$. Déterminer la matrice A.

☐
$$A = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2+h^2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2+h^2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

☐
$$A = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 1+h^2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2+h^2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2+h^2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1+h^2 \end{pmatrix}$$

☐
$$A = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2+h^2 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 2+h^2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2+h^2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2+h^2 \end{pmatrix}$$

☐
$$A = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 1+h & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1+h \end{pmatrix}$$

☐
$$A = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2+h^2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2+h^2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2+h^2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2+h^2 \end{pmatrix}$$

Deuxième partie: Questions à choix multiple (MATLAB)

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Soit N un entier positif et $\alpha = (N+1)^2$. On considère, pour $t > 0$, le système différentiel suivant : $u_1, \ldots, u_N : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ telles que

$$\begin{aligned}
&\dot{u}_1(t) + \alpha\Big(2u_1(t) - u_2(t)\Big) + (u_1(t))^3 = 0,\\
&\dot{u}_2(t) + \alpha\Big(-u_1(t) + 2u_2(t) - u_3(t)\Big) + (u_2(t))^3 = 0,\\
&\vdots\\
&\dot{u}_{N-1}(t) + \alpha\Big(-u_{N-2}(t) + 2u_{N-1}(t) - u_N(t)\Big) + (u_{N-1}(t))^3 = 0,\\
&\dot{u}_N(t) + \alpha\Big(-u_{N-1}(t) + 2u_N(t)\Big) + (u_N(t))^3 = 0,
\end{aligned}$$

avec comme condition initiale $u_1(0) = u_2(0) = \ldots = u_N(0) = 1$. On note $\vec{u}(t)$ le N-vecteur de composantes $u_i(t)$, $h > 0$ le pas de temps, $t_n = nh$, et $\vec{u}^n$ une approximation de $\vec{u}(t_n)$, $n = 0, 1, \ldots, M$. On considère un schéma d'Euler rétrograde en temps. A chaque pas de temps, il s'agit de résoudre un système non linéaire avec une méthode de Newton. A chaque itération de la méthode de Newton, on effectue une décomposition de Cholesky de la matrice et on résout deux systèmes linéaires triangulaires successifs.

Le programme suivant correspond à cette méthode, mais il est incomplet.

Explications: Dans ce programme

- `N` correspond au nombre d'inconnues du système différentiel,
- `M` est le nombre de pas de temps,
- `Newt` correspond au nombre d'itérations de l'algorithme de Newton,
- `h` est le pas de temps,
- `u` est un N-vecteur qui contient l'approximation de la solution du système différentiel,
- `x` est un N-vecteur qui contient les itérés de la méthode de Newton,
- `a` est un N-vecteur qui contient les éléments de la diagonale de la matrice Jacobienne,
- `c` est un $(N-1)$-vecteur, qui contient les éléments de la sous-diagonale de la matrice Jacobienne, et
- `b` est un N-vecteur qui contient les éléments du second membre du système de Newton.

```
%  Schema d'Euler retrograde pour un systeme differentiel non lineaire
N=10;
Newt=5;
alpha=(N+1)*(N+1);
M=10;
h=0.1;
%
% Condition initiale
for i=1:N
  u(i)=1.;
end
%
% Schema d'Euler retrograde
for n=1:M % Debut boucle sur les pas de temps
  %
  for i=1:N
    x(i)= ??????
  end
  %
  % Methode de Newton
  for k=1:Newt % Debut boucle de la methode de Newton
   %
   % Definition de la Matrice Jacobienne
   for i=1:N
     a(i) = ??????
   end
   for i=1:N-1
     c(i) = ??????
   end
   %
   % Definition du second membre
   b(1) =  ??????
   for i=2:N-1
     b(i) =  ??????
   end
   b(N) =  ??????

   % Decomposition de Cholesky de la matrice Jacobienne en LL^T
   a(1)=sqrt(a(1));
   for i=1:N-1
     c(i) = c(i)/a(i);
     a(i+1) =  ??????
   end
   %
   % Resolution du systeme lineaire L y = b
   b(1)=b(1)/a(1);
   for i=1:N-1
     b(i+1) =  ??????
   end
   %
   % Resolution du systeme lineaire L^T x = y
   b(N)=b(N)/a(N);
   for i=N-1:-1:1
     b(i) =  ??????
   end
   %
   % Update itere de Newton
   for i=1:N
     x(i) =  ??????
   end
   %
  end % Fin boucle de la methode de Newton
  %
  for i=1:N
    u(i) = x(i);
  end
  %
end % Fin boucle sur les pas de temps
```

Question 16 A la ligne 17, il faut compléter les `??????` de la manière suivante :

- [ ] `x(i) = sin(pi*i*h);`
- [ ] `x(i) = 1.;`
- [ ] `x(i) = 0.;`
- [ ] `x(i) = u(i);`
- [ ] `x(i) = u(i-1);`

Question 17 A la ligne 25, il faut compléter les `??????` de la manière suivante :

- [ ] `a(i) = 1+ alpha*h + h*x(i)*x(i);`
- [ ] `a(i) = 1+2*alpha*h ;`
- [ ] `a(i) = 1+2*alpha*h + 3*h*x(i)*x(i);`
- [ ] `a(i) = 1+2*alpha*h + h*x(i)*x(i)*x(i);`
- [ ] `a(i) = 1+ alpha*h ;`

Question 18 A la ligne 28, il faut compléter les `??????` de la manière suivante :

- [ ] `c(i) = -alpha*h + x(i)*x(i);`
- [ ] `c(i) = alpha*h;`
- [ ] `c(i) = -alpha*h + 3*x(i)*x(i);`
- [ ] `c(i) = -2*alpha*h;`
- [ ] `c(i) = -alpha*h;`

Question 19 A la ligne 34, il faut compléter les `??????` de la manière suivante :

- [ ] `b(i) = (1+2*alpha*h)*x(i) -alpha*h*x(i-1) -alpha*h*x(i+1) ;`
- [ ] `b(i) = (1+2*alpha*h)*u(i) -alpha*h*u(i-1) -alpha*h*u(i+1) + h*u(i)*u(i)*u(i) ;`
- [ ] `b(i) = (1+2*alpha*h)*x(i) -alpha*h*x(i-1) -alpha*h*x(i+1) + h*u(i)*u(i)*u(i) ;`
- [ ] `b(i) = (1+2*alpha*h)*x(i) -alpha*h*x(i-1) -alpha*h*x(i+1) - u(i);`
- [ ] `b(i) = (1+2*alpha*h)*x(i) -alpha*h*x(i-1) -alpha*h*x(i+1) + h*x(i)*x(i)*x(i) - u(i);`

Question 20 A la ligne 42, il faut compléter les `??????` de la manière suivante :

- [ ] `a(i+1) = sqrt(a(i+1)-c(i)*c(i));`
- [ ] `a(i+1) = a(i+1)-c(i)*c(i);`
- [ ] `a(i+1) = sqrt(a(i)-c(i)*c(i));`
- [ ] `a(i+1) = a(i)-c(i)*c(i);`
- [ ] `a(i+1) = sqrt(a(i+1)-c(i+1)*c(i+1));`

Question 21 A la ligne 48, il faut compléter les `??????` de la manière suivante :

- [ ] `b(i+1) = (b(i+1)-c(i+1)*b(i+1))/a(i+1);`
- [ ] `b(i+1) = (b(i+1)-c(i)*b(i))/a(i+1);`
- [ ] `b(i+1) = (b(i)-c(i)*b(i))/a(i+1);`
- [ ] `b(i+1) = (b(i)-c(i)*b(i))/a(i);`
- [ ] `b(i+1) = (b(i+1)-c(i+1)*b(i))/a(i);`

Question 22 A la ligne 54, il faut compléter les `??????` de la manière suivante :

- ☐ `b(i) = (b(i)-c(i)*b(i+1))/a(i+1);`
- ☐ `b(i) = b(i)-c(i)*b(i+1);`
- ☐ `b(i) = (b(i)-c(i)*b(i+1))/a(i);`
- ☐ `b(i) = (b(i)-c(i+1)*b(i+1))/a(i);`
- ☐ `b(i) = b(i)-c(i+1)*b(i+1);`

Question 23 A la ligne 59, il faut compléter les `??????` de la manière suivante :

- ☐ `x(i) = x(i) - u(i);`
- ☐ `x(i) = b(i) - x(i);`
- ☐ `x(i) = u(i) - b(i);`
- ☐ `x(i) = u(i) - x(i);`
- ☐ `x(i) = x(i) - b(i);`

Troisième partie: Questions calculatoires

Indiquer la réponse finale dans la case correspondante en bas à droite. Les calculs peuvent être détaillés dans la partie quadrillée prévue à cet effet. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 24: *Cette question est notée sur 2 points.*

☐0 ☐1 ☐2

Soit p le polynôme de degré 2 tel que

$$p(0) = 1, \quad p(1) = 2, \quad p(2) = 3$$

Calculer $p(3)$.

Votre réponse: $p(3) =$

Question 25: *Cette question est notée sur 2 points.*

0 1 2

Pour toute fonction f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, trois fois continûment dérivable, et $x \in \mathbb{R}$, montrer qu'il existe $h_0 > 0$ et $C > 0$ telles que pour tout $0 < h \leq h_0$ on a :

$$\left| f'(x) - \frac{f(x+2h) - 4f(x-h) + 3f(x)}{6h} \right| \leq \ Ch^2$$

et expliciter C.

Votre réponse: $C =$

Quatrième partie: Questions ouvertes

Répondre dans l'espace quadrillé dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 26: *Cette question est notée sur 5 points (au demi-point).*

☐0 ☐.5 ☐1 ☐.5 ☐2 ☐.5 ☐3 ☐.5 ☐4 ☐.5 ☐5

Soit $a < b$. Soit $f \in C^2([a,b])$, et soient $N \in \mathbb{N}$ et $x_0 = a < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_N = b$. Soit $h = \max_{0 \leq i \leq N-1} |x_{i+1} - x_i|$, et notons f_h l'interpolant de f de degré 1 par intervalles.

Montrer qu'il existe une constante C (indépendante du choix des x_i, $1 \leq i \leq N-1$) telle que

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x) - f_h(x)| \leq Ch^2.$$

Question 27: *Cette question est notée sur 5 points (au demi-point).*

☐0 ☐.5 ☐1 ☐.5 ☐2 ☐.5 ☐3 ☐.5 ☐4 ☐.5 ☐5

On considère le problème de Cauchy suivant: étant donnés $u_0 \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$, trouver $u : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = -\lambda u(t), & t > 0, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Soit $h > 0$ le pas de temps, on note $t_n = nh$, $n = 0, 1, 2, ...$, et u^n l'approximation de $u(t_n)$ obtenue avec le schéma suivant (schéma de Heun):

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{h} = \frac{1}{2}\left(-\lambda u^n - \lambda \hat{u}^n\right) \qquad \text{avec} \quad \hat{u}^n = u^n + h(-\lambda u^n).$$

(a) Ecrire $u^n = \alpha^n\, u_0$ pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$.

(b) Sous quelle condition a-t-on

$$\lim_{n \to 0} u^n = 0 \qquad \text{pour tout} \quad u^0 \in \mathbb{R}?$$

Question 28: *Cette question est notée sur 5 points (au demi-point).*

☐0 ☐.5 ☐1 ☐.5 ☐2 ☐.5 ☐3 ☐.5 ☐4 ☐.5 ☐5

Soient $f \in C^0([0,1])$, chercher $u \in C^2([0,1])$ telle que

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x) \qquad \text{si } 0 < x < 1, \\ u(0) &= u(1) = 0. \end{aligned}$$

(a) Ecrire le problème faible correspondant à ce problème fort. Expliciter l'espace V.

(b) Ecrire l'approximation de Galerkin du problème faible. Expliciter l'espace V_h.

(c) Montrer que

$$\int_0^1 (u'(x) - u_h'(x))v_h'(x)dx = 0, \qquad \forall v_h \in V_h.$$

(d) Montrer que

$$|u - u_h|_1 \leq \min_{v_h \in V_h} |u - v_h|_1,$$

où $|g|_1 = \left(\int_0^1 (g'(x))^2 dx\right)^{1/2}$.

Question 29: *Cette question est notée sur 5 points (au demi-point).*

☐0 ☐.5 ☐1 ☐.5 ☐2 ☐.5 ☐3 ☐.5 ☐4 ☐.5 ☐5

Soit $a < b$, $f \in C^4([a,b])$. Soient $N \in \mathbb{N}$, $h = (b-a)/N$, $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, 2, \ldots, N$. On considère la formule composite suivante (formule de Simpson):

$$L_h(f) = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{h}{2} \left(\frac{1}{3} f(x_i) + \frac{4}{3} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right) + \frac{1}{3} f(x_{i+1}) \right).$$

(a) Montrer que

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{h}{2} \int_{-1}^{+1} f\left(x_i + \frac{h}{2}(t+1) \right) dt.$$

(b) Montrer que, pour tout $i = 0, 1, \ldots, N-1$:

$$f\left(x_i + \frac{h}{2}(t+1) \right) = p_i(t) + r_i(t),$$

où $p_i(t)$ est un polynôme de degré 3 et $r_i(t)$ est un reste. Expliciter $p_i(t)$ et $r_i(t)$.

(c) Montrer que

$$J(p) \overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{3} p(-1) + \frac{4}{3} p(0) + \frac{1}{3} p(+1) = \int_{-1}^{+1} p(t)dt, \quad \text{pour tout } p \in \mathbb{P}_3.$$

(d) En déduire que

$$\left| \int_a^b f(x)dx - L_h(f) \right| \leq Ch^4,$$

où C est une constante qui ne dépend pas de N (et donc pas de h).