Corrigé 9

Exercice 1

1.a) Vérification directe.

1.b) Multiplions la première équation du problème par une fonction $v \in \mathcal{C}^1([0,1])$. En intégrant sur l'intervalle $[0,1]$ nous obtenons

$$-\int_0^1 u''(x)v(x)dx \;=\; 2\int_0^1 v(x)dx.$$

En intégrant par parties la première intégrale de cette équation, nous obtenons

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx - \Big[u'(x)v(x)\Big]_{x=0}^{x=1} \;=\; 2\int_0^1 v(x)dx.$$

Si nous imposons à la fonction v d'être nulle en $x=0$ et $x=1$, alors nous déduisons l'équation

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx \;=\; 2\int_0^1 v(x)dx.$$

Soit V l'ensemble des fonctions continues $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, de première dérivée g' continue par morceaux et telles que $g(0) = g(1) = 0$. La formulation faible du problème consiste à trouver $u \in V$ tel que

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx \;=\; 2\int_0^1 v(x)dx, \quad \forall v \in V.$$

1.c) On considère une méthode d'éléments finis continus de degré 1 pour résoudre le problème. Pour ceci, notons $h = \frac{1}{3}$ et $x_j = jh$ avec $j = 0,1,2,3$. Les fonctions "*chapeaux*" φ_1 et φ_2 de la base d'éléments finis associée aux noeuds x_1 et x_2 sont données par:

$$\varphi_1(x) \;=\; \begin{cases} \dfrac{x-x_0}{h} & \text{si } x \in [x_0,x_1], \\ \dfrac{x_2-x}{h} & \text{si } x \in [x_1,x_2], \\ 0 & \text{si } x > x_2, \end{cases} \qquad \varphi_2(x) \;=\; \begin{cases} \dfrac{x-x_1}{h} & \text{si } x \in [x_1,x_2], \\ \dfrac{x_3-x}{h} & \text{si } x \in [x_2,x_3], \\ 0 & \text{si } x < x_1. \end{cases}$$

Notons $V_h = \text{span}\{\varphi_1, \varphi_2\}$. L'approximation de Galerkin correspondant au problème faible précédent consiste à trouver $u_h \in V_h$ tel que

$$\int_0^1 u_h'(x)v_h'(x)dx \;=\; 2\int_0^1 v_h(x)dx, \quad \forall v_h \in V_h.$$

Comme nous cherchons u_h dans V_h, nous pouvons écrire

$$u_h(x) = u_1\varphi_1(x) + u_2\varphi_2(x),$$

les coefficients u_1 et u_2 étant les inconnues du problème. En choisissant $v_h = \varphi_1$ puis, $v_h = \varphi_2$ dans l'approximation de Galerkin nous obtenons le système de deux équations à deux inconnues u_1 et u_2 suivant:

$$\begin{cases} u_1 \int_0^1 \varphi_1'(x)\varphi_1'(x)dx + u_2 \int_0^1 \varphi_2'(x)\varphi_1'(x)dx & = 2\int_0^1 \varphi_1(x)dx, \\ u_1 \int_0^1 \varphi_1'(x)\varphi_2'(x)dx + u_2 \int_0^1 \varphi_2'(x)\varphi_2'(x)dx & = 2\int_0^1 \varphi_2(x)dx. \end{cases}$$

Ces relations peuvent s'écrire sous la forme d'un système linéaire:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix},$$

où les coefficients a_{ij}, f_i, $i = 1, 2$, $i = 1, 2$ sont définis par:

$$a_{ij} = \int_0^1 \varphi_i'(x)\varphi_j'(x)dx \qquad \text{et} \qquad f_i = 2\int_0^1 \varphi_i(x)dx.$$

En effectuant les calculs nous obtenons:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \int_0^1 \varphi_1'(x)\varphi_1'(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} \varphi_1'(x)\varphi_1'(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} \varphi_1'(x)\varphi_1'(x)dx, \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{1}{h}\right)\left(\frac{1}{h}\right) dx + \int_{x_1}^{x_2} \left(-\frac{1}{h}\right)\left(-\frac{1}{h}\right) dx = \frac{x_1 - x_0}{h^2} + \frac{x_2 - x_1}{h^2} = \frac{2}{h}, \end{aligned}$$

$$a_{22} = \int_0^1 \varphi_2'(x)\varphi_2'(x)dx = \frac{2}{h},$$

$$a_{12} = a_{21} = \int_0^1 \varphi_1'(x)\varphi_2'(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(-\frac{1}{h}\right)\left(\frac{1}{h}\right) dx = -\frac{1}{h},$$

$$f_1 = 2\int_0^1 \varphi_1(x)dx = 2\int_{x_0}^{x_1} \varphi_1(x)dx + 2\int_{x_1}^{x_2} \varphi_1(x)dx = 2\frac{h}{2} + 2\frac{h}{2} = 2h,$$

$$f_2 = 2\int_0^1 \varphi_2(x)dx = 2h.$$

On obtient le système linéaire:

$$\frac{1}{h}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = h\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

La solution est donné par:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2h^2 \\ 2h^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} \end{pmatrix}.$$

Puisque la solution exacte du problème satisfait

$$u(x_1) = x_1(1-x_1) = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{9},$$
$$u(x_2) = x_2(1-x_2) = \frac{2}{3}\left(1-\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{9}$$

on a bien $u_i = u(x_i)$, $i = 1, 2$.

1.d) On peut également résoudre le problème par une méthode de différences finies. On approche alors $u''(x_i)$, $i = 1, 2$ par

$$\frac{u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1})}{h^2}.$$

La méthode des différences finies conduit à la résolution du système linéaire

$$\frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

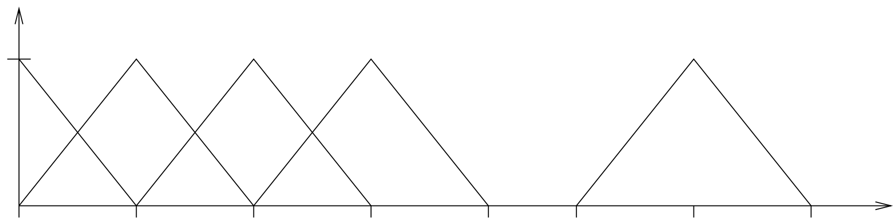
La solution du système linéaire obtenu par la méthode des différences finies coïncide donc avec la solution du système linéaire obtenu par la méthode des éléments finis.

Exercice 2

2.a) Soit V l'ensemble des fonctions continues $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, de première dérivée g' continue par morceaux et telles que $g(1) = 0$. La formulation faible du problème consiste à trouver $u \in V$ tel que

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx, \quad \forall v \in V.$$

2.b) La représentation graphique des fonctions de base $\varphi_i, i = 0, \ldots, N$ est la suivante:



Nous notons V_h le sous-espace vectoriel de V engendré par les fonctions φ_i, $i = 0, ..., N$. L'approximation de Galerkin correspondant au problème faible consiste à trouver $u_h \in V_h$ tel que

$$\int_0^1 u_h'(x)v_h'(x)dx = \int_0^1 f(x)v_h(x)dx, \quad \forall v_h \in V_h.$$

Comme nous cherchons u_h dans V_h, nous pouvons écrire

$$u_h(x) = \sum_{i=0}^{N} u_i \varphi_i(x),$$

les coefficients u_i, $i = 0, \dots, N$ étant les inconnues du problème. En choisissant $v_h = \varphi_j$, $j = 0, 1, 2, ..., N$ dans l'approximation de Galerkin, nous obtenons le système de $N+1$ équations à $N+1$ inconnues suivant:

$$\sum_{i=0}^{N} u_i \left(\int_0^1 \varphi_i'(x)\varphi_j'(x)dx \right) = \int_0^1 f(x)\varphi_j(x)dx, \quad j = 0, ..., N.$$

Ces relations peuvent s'écrire sous la forme d'un système linéaire. Soit A la $(N+1) \times (N+1)$-matrice de coefficients A_{ij}, $0 \leqslant i, j \leqslant N$ et soit $\vec{f}$ le $(N+1)$-vecteur de coefficients f_j, $0 \leqslant j \leqslant N$ définis par :

$$A_{ij} = \int_0^1 \varphi_i'(x)\varphi_j'(x)dx \qquad \text{et} \qquad f_j = \int_0^1 f(x)\varphi_j(x)dx.$$

Alors le problème est équivalent à trouver le $(N+1)$-vecteur $\vec{u}$ tel que

$$A\vec{u} = \vec{f}.$$

Les seuls coefficients non-nuls de A sont les coefficients A_{jj}, $j = 0, \dots, N$, les coefficients $A_{j,j+1}$, $j = 0, \dots, N-1$ et les coefficients $A_{j+1,j}$, $j = 0, \dots, N-1$. Comme $A_{ji} = A_{ij}$ il suffit de calculer A_{jj} et $A_{j,j+1}$:

$$A_{jj} = \int_{x_{j-1}}^{x_j} (\varphi_j'(x))^2 dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} (\varphi_j'(x))^2 dx, \quad j = 1, \dots, N,$$

$$A_{0,0} = \int_{x_0}^{x_1} (\varphi_0'(x))^2 dx$$

et

$$A_{j,j+1} = \int_{x_j}^{x_{j+1}} \varphi_j'(x)\varphi_{j+1}'(x)dx, \quad j = 0, \dots, N-1.$$

De même nous avons

$$f_j = \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\varphi_j(x)dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)\varphi_j(x)dx, \quad j = 1, \dots, N.$$

et

$$f_0 = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\varphi_0(x)dx.$$

2.c) On a $A_{jj} = \frac{2}{h}$, $A_{j,j+1} = -\frac{1}{h}$ pour $j = 1, \dots, N$ et $A_{0,0} = \frac{1}{h}$. Pour approcher les intégrales des coefficients de $\vec{f}$, nous utilisons la formule du trapèze:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} g(x)dx \approx \frac{x_{k+1} - x_k}{2} \Big(g(x_k) + g(x_{k+1}) \Big),$$

où $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ est continue. On trouve donc

$$\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} f(x)\varphi_j(x)dx \approx hf(x_j) = \tilde{f}_j, \quad j = 1, \ldots, N$$

et

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\varphi_0(x)dx \approx \frac{h}{2}f(x_0) = \tilde{f}_0.$$

Le système linéaire $A\vec{\tilde{u}} = \vec{\tilde{f}}$ est donc bien celui recherché avec $\alpha = \frac{1}{h}\tilde{f}_0 = \frac{1}{2}f(x_0)$.

2.d) La formule

$$\frac{u_{-1} - u_1}{2h} = 0$$

vient de la condition de bord $u'(0) = 0$ qu'on approche par une formule de différences finies centrées. La deuxième formule

$$\frac{-u_{-1} + 2u_0 - u_1}{h^2} = f(x_0)$$

vient de l'équation $-u''(x) = f(x)$ qu'on approche au point x_0 par une formule de différences finies centrées. En utilisant ces deux formules, et en appliquant le schéma de différences finies centrées pour les indices $i = 0, \ldots, N$ on trouve

$$\begin{aligned}
&\frac{-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}}{h^2} = f(x_i), \quad i = 1, \ldots, N,\\
&\frac{-u_1 + u_0}{h^2} = \frac{1}{2}f(x_0),\\
&u_{N+1} = 0.
\end{aligned}$$

Le système linéaire correspondant est le suivant:

$$\frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & 0 \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & 0 & & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{pmatrix},$$

donc c'est le même que celui qu'on a trouvé en utilisant la m'ethode d'éléments finis de degré un.

Exercice 3

3.a) Soit V l'ensemble des fonctions continues $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, de première dérivée g' continue par morceaux et telles que $g(0) = g(1) = 0$. La formulation faible consiste à trouver $u \in V$ tel que

$$\int_0^1 (1+x)u'(x)v'(x)dx \;=\; \int_0^1 \sin(x)v(x)dx, \quad \forall v \in V. \tag{1}$$

3.b) Si $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_N$ sont N fonctions linéairement indépendantes de V, nous notons V_h le sous-espace vectoriel engendré par les $\varphi_i,\ i = 1, ..., N$. L'approximation de Galerkin correspondant au problème (1) consiste à trouver $u_h \in V_h$ tel que

$$\int_0^1 (1+x)u_h'(x)v_h'(x)dx = \int_0^1 \sin(x)v_h(x)dx, \quad \forall v_h \in V_h. \tag{2}$$

Comme nous cherchons u_h dans V_h, nous pouvons écrire

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^{N} u_i\varphi_i(x),$$

les coefficients $u_i,\ i = 1, \dots, N$ étant les inconnues du problème. En choisissant $v_h = \varphi_j,\ j = 1, 2, ..., N$ dans (2), nous obtenons le système de N équations à N inconnues u_i, $i = 1, 2, ..., N$ suivant:

$$\sum_{i=1}^{N} u_i \left(\int_0^1 (1+x)\varphi_i'(x)\varphi_j'(x)dx \right) = \int_0^1 \sin(x)\varphi_j(x)dx, \quad j = 1, 2, ..., N.$$

Ces relations peuvent s'écrire sous la forme d'un système linéaire. Soit A la $N \times N$-matrice de coefficients A_{ji}, $1 \leqslant j, i \leqslant N$ et soit $\vec{f}$ le N-vecteur de coefficients f_j, $1 \leqslant j \leqslant N$ définis par :

$$A_{ji} = \int_0^1 (1+x)\varphi_i'(x)\varphi_j'(x)dx \qquad \text{et} \qquad f_j = \int_0^1 \sin(x)\varphi_j(x)dx.$$

Alors le problème (2) est équivalent à trouver le N-vecteur $\vec{u}$ tel que

$$A\vec{u} = \vec{f}.$$

3.c) On considère la base particulière des éléments finis de degré 1 et on approche numériquement les coefficients de la matrice A et du vecteur $\vec{f}$. Par définition des φ_j, la matrice A est bien tridiagonale et les seuls coefficients non-nuls de A sont les coefficients $A_{j,j}$, $j = 1, \dots, N$, les coefficients $A_{j,j+1}$, $j = 1, \dots, N-1$ et les coefficients $A_{j-1,j}$, $j = 2, \dots, N$. Comme $A_{ji} = A_{ij}$ il suffit de calculer A_{jj} et $A_{j,j+1}$:

$$A_{jj} = \int_{x_{j-1}}^{x_j} (1+x)(\varphi_j'(x))^2dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} (1+x)(\varphi_j'(x))^2dx$$

et

$$A_{j,j+1} = \int_{x_j}^{x_{j+1}} (1+x)\varphi_j'(x)\varphi_{j+1}'(x)dx$$

De même nous avons

$$f_j = \int_{x_{j-1}}^{x_j} \sin(x)\varphi_j(x)dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} \sin(x)\varphi_j(x)dx.$$

3.d) Soit $\tilde{A}$ la $N \times N$-matrice obtenue en utilisant la formule des trapèzes pour approcher les coefficients de A. De même, soit $\tilde{\vec{f}}$ le second membre obtenu au moyen de la formule des trapèzes. Nous obtenons alors

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \tilde{A}_{jj} &=& \dfrac{1}{h}\left(\dfrac{(1+x_{j-1}) + 2(1+x_j) + (1+x_{j+1})}{2} \right), & j = 1, ..., N \\[2ex] \tilde{A}_{j,j+1} &=& -\dfrac{1}{h}\dfrac{(1+x_j) + (1+x_{j+1})}{2}, & j = 1, ..., (N-1) \\[2ex] \tilde{f}_j &=& h\sin(x_j), & j = 1, ..., N. \end{array} \right.$$