Corrigé 7

Exercice 1

1.a) Le schéma d'Euler progressif s'écrit

$$\begin{cases} \frac{u_1^{n+1}-u_1^n}{h} + 2u_1^n - u_2^n + \big(1+\cos u_1^n\big)e^{u_1^n} &= 1, \\ \frac{u_2^{n+1}-u_2^n}{h} + 2u_2^n - u_1^n + \big(1+\cos u_2^n\big)e^{u_2^n} &= 1, \end{cases}$$

et $u_1^0 = u_2^0 = 0$. Ce schéma est explicite:

$$\begin{cases} u_1^{n+1} = u_1^n - h\Big(2u_1^n - u_2^n + \big(1+\cos u_1^n\big)e^{u_1^n} - 1\Big), \\ u_2^{n+1} = u_2^n - h\Big(2u_2^n - u_1^n + \big(1+\cos u_2^n\big)e^{u_2^n} - 1\Big). \end{cases}$$

En considérant $u_1^0 = u_2^0 = 0$, nous obtenons:

$$u_1^1 = -h, \quad u_2^1 = -h.$$

1.b) Le schéma d'Euler rétrograde s'écrit

$$\begin{cases} \frac{u_1^{n+1}-u_1^n}{h} + 2u_1^{n+1} - u_2^{n+1} + \big(1+\cos u_1^{n+1}\big)e^{u_1^{n+1}} = 1 \\ \frac{u_2^{n+1}-u_2^n}{h} + 2u_2^{n+1} - u_1^{n+1} + \big(1+\cos u_2^{n+1}\big)e^{u_2^{n+1}} = 1, \end{cases}$$

et $u_1^0 = u_2^0 = 0$. Le schéma d'Euler rétrograde peut s'écrire sous la forme $\vec{F}(\vec{u}^{n+1}) = 0$ ou $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{F}$ definie par:

$$\vec{F}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} F_1(v_1, v_2) \\ F_2(v_1, v_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{v_1 - u_1^n}{h} + 2v_1 - v_2 + \big(1+\cos v_1\big)e^{v_1} - 1 \\ \frac{v_2 - u_2^n}{h} + 2v_2 - v_1 + \big(1+\cos v_2\big)e^{v_2} - 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice jacobienne $D\vec{F}(\vec{v})$ est alors définie par:

$$D\vec{F}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{h} + 2 + \big(1+\cos v_1 - \sin v_1\big)e^{v_1} & -1 \\ -1 & \frac{1}{h} + 2 + \big(1+\cos v_2 - \sin v_2\big)e^{v_2} \end{pmatrix}.$$

Soit $\vec{u}^1$ tel que $\vec{F}(\vec{u}^1) = 0$. On approche $\vec{u}^1$ en utilisant la méthode de Newton:

$$D\vec{F}(\vec{x}^k)(\vec{x}^k - \vec{x}^{k+1}) = \vec{F}(\vec{x}^k) \quad k = 0, 1, 2, ...,$$

avec $\vec{x}^0 = \vec{u}^0 = \vec{0}$. Pour calculer $\vec{x}^1$, on résoud le système linéaire $D\vec{F}(\vec{x}^0)\vec{y} = \vec{F}(\vec{x}^0)$ et on pose $\vec{x}^1 = \vec{x}^0 - \vec{y}$. On obtient

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{h} + 4 & -1 \\ -1 & \frac{1}{h} + 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

et donc

$$\vec{x}^1 = \begin{pmatrix} \frac{h}{3h+1} \\ -\frac{h}{3h+1} \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

2.a) En ecrivant l'équation différentielle en $t = t_{n+1/2}$, on a

$$\dot{u}(t_{n+1/2}) = f\left(u(t_{n+1/2}), t_{n+1/2}\right).$$

On utilise une formule de difference centrée pour approcher $\dot{u}(t_{n+1/2})$:

$$\frac{u(t_{n+1}) - u(t_n)}{h} = f\left(u(t_{n+1/2}), t_{n+1/2}\right) + O(h^2).$$

Si u est $C^2(\mathbb{R}^+)$, on a

$$\begin{aligned} u(t_{n+1/2}) &= u(t_n) + \frac{h}{2}\dot{u}(t_n) + \frac{h^2}{8}\ddot{u}(\xi), \\ &= u(t_n) + \frac{h}{2} f\left(u(t_n), t_n\right) + O(h^2). \end{aligned}$$

On a donc

$$\frac{u(t_{n+1}) - u(t_n)}{h} = f\left(u(t_n) + \frac{h}{2} f\left(u(t_n), t_n\right), t_{n+1/2}\right) + O(h^2).$$

Soit u^n une approximation de $u(t_n)$ et soit u^{n+1} une approximation de $u(t_{n+1})$. La schéma

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{h} = f\left(u^n + \frac{h}{2} f\left(u^n, t_n\right)\ ,\ t_n + \frac{h}{2}\right),$$

est donc consistant à l'ordre 2 en h. La méthode obtenue est une méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 explicite aussi appellée *méthode d'Euler modifiée.*

2.b) Considérons le cas où $f(x,t) = -\beta x$ ou $\beta > 0$. Le schéma numérique devient

$$u^{n+1} = (1 - \beta h + \frac{\beta^2 h^2}{2}) u^n$$

et par suite

$$u^n = \left(1 - \beta h + \frac{\beta^2 h^2}{2}\right)^n u_0.$$

Pour $u_0 \neq 0$ on a $\lim_{n\to\infty} u^n = 0$ si

$$\left|1 - \beta h + \frac{\beta^2 h^2}{2}\right| < 1,$$

c'est-à-dire

$$-1 < 1 - \beta h + \frac{\beta^2 h^2}{2} < 1.$$

On remarque que $\left(1 - \beta h + \frac{\beta^2 h^2}{2}\right) = \left(1 - \frac{\beta h}{2}\right)^2 + \frac{\beta^2 h^2}{4} > 0$ pour tout $h > 0$ et $\beta > 0$. Donc l'inégalité gauche est toujours satisfaite. Pour l'inégalité de droite on a

$$1 - \beta h + \frac{\beta^2 h^2}{2} < 1,$$

si

$$\frac{\beta^2 h^2}{2} < \beta h,$$

soit encore si $h < \frac{2}{\beta}$.

Exercice 3

3.a) En utilisant la définition de $\vec{u}(t)$ et en posant $\dot{\vec{u}}(t)$ le vecteur de composantes $\dot{u}_1(t)$, $\dot{u}_2(t)$, …, $\dot{u}_N(t)$, le système différentiel (1) peut être écrit sous la forme vectorielle

$$\dot{\vec{u}}(t) + A\vec{u}(t) = 0,$$

avec

$$A = \alpha \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & -1 & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3.b) Schéma d'Euler progressif

$$\frac{\vec{u}^{n+1} - \vec{u}^n}{h} = -A\vec{u}^n \quad \text{ou encore} \quad \vec{u}^{n+1} = (I - hA)\vec{u}^n.$$

Les lignes manquantes dans l'algorithme sont les suivantes :

```
unew(1) = (1 - 2 * alpha * h) * uold(1) + alpha * h * uold(2);
for i=2:N-1
  unew(i) = alpha * h * uold(i-1) + (1 - 2 * alpha * h) * uold(i) + alpha * h * uold(i + 1);
end
unew(N) = alpha * h * uold(N - 1) + (1 - 2 * alpha * h) * uold(N);
```

3.c) Schéma d'Euler rétrograde

$$\frac{\vec{u}^{n+1} - \vec{u}^n}{h} = -A\vec{u}^{n+1} \quad \text{ou encore} \quad (I + hA)\vec{u}^{n+1} = \vec{u}^n.$$

Les lignes manquantes dans l'algorithme de la donnée sont les suivantes :

```
%
% decomposition de cholesky de la matrice I+hA : I+hA = LL^T
%
diag = 1 + 2 * alpha * h;
sdiag = -alpha * h;
a(1) = sqrt(diag);
for i = 1 : N - 1
  c(i) = sdiag / a(i);
  a(i+1) = sqrt(diag - c(i) * c(i));
end
%
% schema d'Euler retrograde : (I+hA) u^{n+1} = u^{n}
%
for n = 1 : M
%
% resolution du systeme lineaire Ly = u^{n} */
%
  u(1) = u(1) / a(1);
  for i = 1 : N - 1
    u(i+1) = (u(i+1) - c(i) * u(i)) / a(i + 1);
  end
%
```

```
% resolution du systeme lineaire L^T u^{n+1} = y */
%
  u(N) = u(N) / a(N);
  for i = N - 1 : -1 : 1
    u(i) = (u(i) - c(i) * u(i+1)) / a(i);
  end
end
```

Exercice 4

4.a) La solution de $(\mathcal{P})$ est donnée par $u(t) = u_0 \cos\left(\sqrt{\lambda} t\right)$. Puisque $|\cos x| \leqslant 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $|u(t)| \leqslant |u_0|$, $\forall t \geqslant 0$.

4.b) On a $\ddot{u}(t_n) = -\lambda u(t_n)$. On utilise une formule de différences finies centrées pour approcher $\ddot{u}(t)$. Si $u(t)$ est 4 fois continûment dérivable, on a

$$\frac{u(t_{n+1}) - 2u(t_n) + u(t_{n-1})}{h^2} = -\lambda u(t_n) + O(h^2).$$

Le schéma est donc consistant à l'ordre 2 en h. D'autre part

$$u(t_1) = u(t_0) + h\dot{u}(t_0) + \frac{h^2}{2}\ddot{u}(t_0) + O(h^3)$$

Puisque $u(t_0) = u_0$, $\dot{u}(t_0) = 0$, $\ddot{u}(t_0) = -\lambda u(t_0)$ on a

$$u(h) = u_0(1 - \frac{\lambda h^2}{2}) + O(h^3) = \alpha u_0 + O(h^3).$$

On pose donc $u^0 = u_0$ et $u^1 = \alpha u_0$.