Corrigé 5

Exercice 1

1.a) L'algorithme de Gauss-Seidel est le suivant:

```
function [x_new] = gaussseidel(A, b, max_iter)

% parametres:
%   - A:              matrice tridiagonal
%   - b:              rhs
%   - max_iter:       nombre maximal d'iterations

% initialization
N = length(A);
x_old = zeros(N,1);
x_new = zeros(N,1);


for n = 1 : max_iter
    x_new(1) = (b(1) - A(1,2) * x_old(2)) / A(1,1);
    for i = 2 : N-1
        x_new(i) =(b(i) - A(i,i-1) * x_new(i-1) - A(i,i+1) * x_old(i+1)) / A(i,i);
    end
    x_new(N) = (b(N) - A(N,N-1) * x_new(N-1)) / A(N,N);

    discrepance = norm(x_new - x_old) / norm(x_new);

    if discrepance < 0.0001
        fprintf(' convergence obtenue a l''iteration %d \n',n)
        break
    else
        x_old = x_new;
        fprintf(' iteration %d discrepance %e \n', n, discrepance)
    end
end

end
```

1.b) Le tableau suivant contient le nombre d'itérations en fonction de N :

N	Nombre d'itérations
2	8
4	21
8	59
16	171
32	499
64	1368

On constate que le nombre d'itérations est multiplié par au moins 2 chaque fois que N est multiplié par 2. Le nombre d'itérations est donc au moins $O(N)$. A chaque itération de la méthode de Gauss-Seidel, il faut faire $O(N)$ opérations. Donc, le nombre total d'opérations est au moins $O(N^2)$.

Exercice 2

2.a) En appliquant le schéma de Jacobi à ce système linéaire, on obtient:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{n+1} \\ x_2^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^n \\ x_2^n \end{pmatrix}.$$

Ceci donne par récurrence:

$$\begin{pmatrix} x_1^{n+1} \\ x_2^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1+x_2^n}{2} \\ \dfrac{1+x_1^n}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1+\frac{1+x_1^{n-1}}{2}}{2} \\ \dfrac{1+\frac{1+x_2^{n-1}}{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{3+x_1^{n-1}}{4} \\ \dfrac{3+x_2^{n-1}}{4} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\alpha = \frac{1}{4}$ et $\beta = \frac{3}{4}$.

2.b) On montre par récurrence que, si $x_2^{n+1} = \alpha x_2^{n-1} + \beta$, on a

$$x_2^{2k} = \alpha^k x_2^0 + \beta \frac{1-\alpha^k}{1-\alpha}$$

Par conséquent, on obtient:

$$x_k^{2k} = \alpha^k x_2^0 + \beta \frac{1-\alpha^k}{1-\alpha} = \frac{1}{4^k} x_0^2 + \frac{3}{4} \cdot \frac{1-\frac{1}{4^k}}{\frac{3}{4}} \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Exercice 3

3.a) On a:

$$\vec{r}^0 = \vec{b} - A\vec{x}^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$z^1 = -Ar^0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\alpha^1 = \frac{||\vec{r}^0||^2}{(\vec{r}^0)^T \vec{z}^1} = -1,$$

$$x^1 = x^0 - \alpha^1 r^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas particulier, on a convergé en une itération!

Exercice 4

4.a) Notons $G_\omega = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$. La définition du cours donne l'égalité suivante :

$$G_\omega = \begin{pmatrix} \frac{2}{\omega} & 0 \\ -1 & \frac{2}{\omega} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2\frac{1-\omega}{\omega} & 1 \\ 0 & 2\frac{1-\omega}{\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}.$$

Il s'agit donc de résoudre les deux systèmes linéaires

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{\omega} & 0 \\ -1 & \frac{2}{\omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} \\ g_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\frac{1-\omega}{\omega} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \frac{2}{\omega} & 0 \\ -1 & \frac{2}{\omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{12} \\ g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2\frac{1-\omega}{\omega} \end{pmatrix},$$

ce qui est une tâche aisée puisque la matrice est triangulaire. Nous obtenons bien $g_{11} = 1-\omega$, $g_{21} = \omega(1-\omega)/2$, puis $g_{12} = \omega/2$, $g_{22} = 1-\omega+\omega^2/4$. Nous avons donc bien montré l'expression de la matrice G_ω.

4.b) Par définition, la matrice de Jacobi est donnée par :

$$J = D^{-1}(E+F) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

et donc, pour tout nombre λ, nous avons

$$\det(J - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \frac{1}{4}.$$

Donc, $\det(J - \lambda I) = 0$ pour $\lambda = \pm 1/2$ et par conséquent $\rho(J) = 1/2$. On déduit du résultat du cours que $\omega_{opt} = 8 - 4\sqrt{3}$.