Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
Analyse numérique (GM) / MATH-251(e)

Alexandre Caboussat
Printemps 2025

Corrigé 4

Exercice 1

Comme A est supposée symétrique définie positive, il existe une unique matrice triangulaire inférieure L à valeurs diagonales positives telle que $A = LL^T$. Comme A est une matrice de bande de demi-largeur $\ell = 2$, la matrice L est aussi de bande de demi-largeur $\ell = 2$. L'équation $A = LL^T$ s'écrit donc

$$
\begin{bmatrix}
a_1 & c_1 & & & \\
c_1 & a_2 & \ddots & 0 & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & 0 & \ddots & a_{N-1} & c_{N-1} \\
 & & & c_{N-1} & a_N
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\ell_1 & & & & \\
m_1 & \ell_2 & & 0 & \\
 & \ddots & \ddots & & \\
 & 0 & \ddots & \ell_{N-1} & \\
 & & & m_{N-1} & \ell_N
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\ell_1 & m_1 & & & \\
 & \ell_2 & \ddots & 0 & \\
 & & \ddots & \ddots & \\
 & 0 & & \ell_{N-1} & m_{N-1} \\
 & & & & \ell_N
\end{bmatrix}
$$

$$
=
\begin{bmatrix}
\ell_1^2 & \ell_1 m_1 & & & \\
\ell_1 m_1 & m_1^2 + \ell_2^2 & \ddots & 0 & \\
 & \ell_2 m_2 & \ddots & \ell_{N-2} m_{N-2} & \\
 & 0 & \ddots & m_{N-2}^2 + \ell_{N-1}^2 & \ell_{N-1} m_{N-1} \\
 & & & \ell_{N-1} m_{N-1} & m_{N-1}^2 + \ell_N^2
\end{bmatrix}.
$$

En identifiant les deux matrices colonne par colonne, on peut compléter le fichier `chol1.m`:

```
function [b]=chol1(N)
%
% remplissage de la matrice A et du second membre b
%
for i=1:N
  a(i)=2.;
  c(i)=-1;
  b(i)=1.;
end
%
% algorithme de cholesky
%
a(1)=sqrt(a(1));
for i=1:N-1
  c(i) = c(i)/a(i);
  a(i+1) = sqrt(a(i+1)-c(i)*c(i));
end
%
% resolution du systeme lineaire Ly = b */
%
b(1)=b(1)/a(1);
for i=1:N-1
  b(i+1) = (b(i+1)-c(i)*b(i))/a(i+1);
```

```
end
%
% resolution du systeme lineaire L^T x = y */
%
b(N)=b(N)/a(N);
for i=N-1:-1:1
  b(i) = (b(i)-c(i)*b(i+1))/a(i);
end
```

Exercice 2

2.a) Il suffit de montrer que les $k \times k$-matrices

$$A_k = \begin{bmatrix} a & d & & \\ & a & \ddots & 0 \\ & & \ddots & d \\ 0 & & & a \end{bmatrix}, \qquad k = 1, ..., N-1,$$

sont régulières, i.e. que $\text{dét}(A_k) \neq 0$. Or on a $\text{dét}(A_1) = a \neq 0$ et $\text{dét}(A_k) = a\text{dét}(A_{k-1})$ pour tout $k = 2, ..., N-1$. Ainsi $\text{dét}(A_k) = a^k \neq 0$ et toutes les sous-matrices principales A_k de A sont régulières.

2.b) Vérifions que la multiplication de L et de U donne bien une matrice de la forme de A :

$$\begin{bmatrix} a & d & & & \\ & a & \ddots & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & a & d \\ c & c & \dots & c & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & & & & \\ & a & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & a & \\ m_1 & m_2 & \dots & m_{N-1} & m_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u & & \\ & 1 & \ddots & 0 \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & \ddots & u \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & au & & & \\ & a & \ddots & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & a & au \\ m_1 & m_1 u + m_2 & \dots & m_{N-2}u + m_{N-1} & m_{N-1}u + m_N \end{bmatrix}.$$

2.c) **Entrées / Sorties :**

Entrées : $a,\ d,\ c$ et $\vec{b}$.
Sorties : le N-vecteur $\vec{m}$ pour décrire L,
la solution $\vec{x}$ de $A\vec{x} = \vec{b}$est stockée dans le vecteur $\vec{b}$.

Décomposition LU :

$$m_1 := c$$

$$d := \frac{d}{a}$$

Faire $i = 2$ à N

$$m_i := c - m_{i-1} * d$$

Résolution (d'abord $L\vec{y} = \vec{b}$, puis $U\vec{x} = \vec{y}$) :

$$\left[\begin{array}{l} \text{Faire} \quad i = 1 \quad \text{à} \quad (N-1) \\ \qquad b_i := \dfrac{b_i}{a} \\ \qquad b_N := b_N - m_i * b_i \end{array}\right.$$

$$b_N := \frac{b_N}{m_N}$$

puis

$$\left[\begin{array}{l} \text{Faire} \quad i = (N-1) \quad \text{à} \quad 1 \quad (\text{pas de } -1) \\ \qquad b_i := b_i - d * b_{i+1} \end{array}\right.$$

Exercice 3

3.a) A est symétrique. Pour montrer que A est symétrique définie positive, il faut prouver que $\vec{x}^T A\vec{x} > 0\ \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2$, $\vec{x} \neq \vec{0}$. Soit $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, avec $\vec{x} \neq \vec{0}$. On a:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + x_2^2 \geqslant 0.$$

3.b) On a:

$$L = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & \sqrt{3/2} \end{pmatrix}.$$