Alexandre Caboussat

Corrigé 3 (b) - Révisions

Exercice 1

1.a) Les vérifications sont immédiates.

1.b) Après calcul, on trouve les polynômes suivants :

$$\begin{aligned}
\varphi_0(t) &= \frac{(t-1)^2\left(t-\frac{1}{2}\right)(4t+1)}{-1/2};\\
\varphi_{1/2}(t) &= \frac{t^2(t-1)^2}{1/16};\\
\varphi_1(t) &= \frac{t^2\left(t-\frac{1}{2}\right)(4t-5)}{-1/2};\\
\psi_0(t) &= \frac{t\left(t-\frac{1}{2}\right)(t-1)^2}{-1/2};\\
\psi_1(t) &= \frac{t^2\left(t-\frac{1}{2}\right)(t-1)}{1/2}.
\end{aligned}$$

Effectuons le détail des calculs pour φ_0. On considère le polynôme $q(t) = (t-1)^2(t-1/2)(\alpha t+\beta)$. Ce polynôme satisfait bien évidemment

$$q(1) = q(1/2) = 0, \qquad q'(1) = 0.$$

Il suffit de trouver α et β tel que $q'(0) = 0$ puis de poser $\varphi_0(t) = \frac{q(t)}{q(0)}$ pour obtenir le résultat.

1.c) Les polynômes $\varphi_0, \varphi_{1/2}, \varphi_1, \psi_0, \psi_1$ sont linéairement indépendants; en effet, considérons une combinaison linéaire nulle de ces quatre fonctions

$$q(t) = \alpha_0\varphi_0(t) + \alpha_1\varphi_{1/2}(t) + \alpha_2\varphi_1(t) + \alpha_3\psi_0(t) + \alpha_4\psi_1(t) = 0, \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

et montrons que $\alpha_i = 0$, $i = 0, \ldots, 4$. En évaluant $q(t)$ en $t = 0$ (resp. $t = 1/2$ et $t = 1$) on obtient $\alpha_0 = 0$ (resp. $\alpha_1 = 0$ et $\alpha_2 = 0$). Puis en évaluant $q'(t)$ en $t = 0$ et $t = 1$, on conclut que $\alpha_3 = 0$ et $\alpha_4 = 0$.

Une famille de cinq polynômes de $\mathbb{P}_4$ linéairement indépendants forme une base de $\mathbb{P}_4$ car $\dim\mathbb{P}_4 = 5$.

1.d) On obtient :

$$\begin{aligned} p(0) &= p_0 \underbrace{\varphi_0(0)}_{=1} + p_{1/2} \underbrace{\varphi_{1/2}(0)}_{=0} + p_1 \underbrace{\varphi_1(0)}_{=0} + q_0 \underbrace{\psi_0(0)}_{=0} + q_1 \underbrace{\psi_1(0)}_{=0} = p_0, \\ p'(0) &= p_0 \underbrace{\varphi_0'(0)}_{=0} + p_{1/2} \underbrace{\varphi_{1/2}'(0)}_{=0} + p_1 \underbrace{\varphi_1'(0)}_{=0} + q_0 \underbrace{\psi_0'(0)}_{=1} + q_1 \underbrace{\psi_1'(0)}_{=0} = p_0'. \end{aligned}$$

De même, on évalue $p(1)$ et $p'(1)$ pour conclure que ce polynôme vérifie les relations (1) et (2). On note pour conclure que

$$p(1/2) = p_0 \underbrace{\varphi_0(1/2)}_{=0} + p_{1/2} \underbrace{\varphi_{1/2}(1/2)}_{=1} + p_1 \underbrace{\varphi_1(1/2)}_{=0} + q_0 \underbrace{\psi_0(1/2)}_{=0} + q_1 \underbrace{\psi_1(1/2)}_{=0} = p_{1/2}.$$

Donc $p(t)$ satisfait la relation (3).

Exercice 2

Dans le cours, on a défini l'opérateur de différence première progressive appliqué à f au point x_0 par

$$\Delta_h f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0).$$

En utilisant la définition récursive de ces opérateurs, $\Delta_h^m f = \Delta_h(\Delta_h^{m-1} f)$, $m \geqslant 2$, on obtient successivement les expressions de l'opérateur de différence seconde Δ_h^2 et de l'opérateur de différence quatrième Δ_h^4 :

$$\begin{aligned} \Delta_h^2 f(x_0) &= f(x_0 + 2h) - 2f(x_0 + h) + f(x_0) \qquad \text{et} \\ \Delta_h^4 f(x_0) &= f(x_0 + 4h) - 4f(x_0 + 3h) + 6f(x_0 + 2h) - 4f(x_0 + h) + f(x_0). \end{aligned}$$

D'autre part, le développement limité à l'ordre 5 de la fonction f autour du point x_0 nous assure que

$$\begin{aligned} f(x_0 + 4h) &= f(x_0) + f'(x_0)\frac{4h}{1!} + f''(x_0)\frac{(4h)^2}{2!} + f^{(3)}(x_0)\frac{(4h)^3}{3!} + f^{(4)}(x_0)\frac{(4h)^4}{4!} + f^{(5)}(\eta_1)\frac{(4h)^5}{5!}, \\ f(x_0 + 3h) &= f(x_0) + f'(x_0)\frac{3h}{1!} + f''(x_0)\frac{(3h)^2}{2!} + f^{(3)}(x_0)\frac{(3h)^3}{3!} + f^{(4)}(x_0)\frac{(3h)^4}{4!} + f^{(5)}(\eta_2)\frac{(3h)^5}{5!}, \\ f(x_0 + 2h) &= f(x_0) + f'(x_0)\frac{2h}{1!} + f''(x_0)\frac{(2h)^2}{2!} + f^{(3)}(x_0)\frac{(2h)^3}{3!} + f^{(4)}(x_0)\frac{(2h)^4}{4!} + f^{(5)}(\eta_3)\frac{(2h)^5}{5!}, \\ f(x_0 + h) &= f(x_0) + f'(x_0)\frac{h}{1!} + f''(x_0)\frac{h^2}{2!} + f^{(3)}(x_0)\frac{h^3}{3!} + f^{(4)}(x_0)\frac{h^4}{4!} + f^{(5)}(\eta_4)\frac{h^5}{5!}, \end{aligned}$$

où $\eta_1 \in [x_0, x_0 + 4h]$, $\eta_2 \in [x_0, x_0 + 3h]$, $\eta_3 \in [x_0, x_0 + 2h]$ et $\eta_4 \in [x_0, x_0 + h]$. Après substitution, on obtient

$$\Delta_h^4 f(x_0) = f^{(4)}(x_0)h^4 + \Big[1024 f^{(5)}(\eta_1) - 972 f^{(5)}(\eta_2) + 192 f^{(5)}(\eta_3) - 4 f^{(5)}(\eta_4)\Big]\frac{h^5}{5!}\ .$$

L'erreur de troncature devient donc

$$\begin{aligned}
\left| f^{(4)}(x_0) - \frac{\Delta_h^4 f(x_0)}{h^4} \right| &= \left| -1024 f^{(5)}(\eta_1) + 972 f^{(5)}(\eta_2) - 192 f^{(5)}(\eta_3) + 4 f^{(5)}(\eta_4) \right| \frac{h}{5!} \\
&\leqslant \frac{1024+972+192+4}{5!} \max_{x\in[x_0,x_0+4h]} \left| f^{(5)}(x) \right| \ h \ .
\end{aligned}$$

Soit $h_0 > 0$ un nombre arbitraire et posons

$$C = \frac{274}{15} \max_{x\in[x_0,x_0+4h_0]} \left| f^{(5)}(x) \right| .$$

Pour tout $h \leqslant h_0$ nous avons donc

$$\left| f^{(4)}(x_0) - \frac{\Delta_h^4 f(x_0)}{h^4} \right| \leqslant Ch.$$

Exercice 3

Notons $t_1 = -1$, $t_2 = \alpha$ et $t_3 = +1$. On considère la base de Lagrange φ_1, φ_2, φ_3 de $\mathbb{P}_2$ associée à ces points. Tout polynôme p de degré 2 peut donc s'écrire comme

$$p(t) = p(t_1)\varphi_1(t) + p(t_2)\varphi_2(t) + p(t_3)\varphi_3(t),$$

où

$$\varphi_1(t) = \frac{(t-\alpha)(t-1)}{2(1+\alpha)}, \qquad \varphi_2(t) = \frac{(t+1)(t-1)}{(\alpha+1)(\alpha-1)} \qquad \text{et} \quad \varphi_3(t) = \frac{(t+1)(t-\alpha)}{2(1-\alpha)}.$$

3.a) Supposons $J(p) = \displaystyle\int_{-1}^{+1} p(t)dt$ pour tout polynôme p de degré 2. Ceci est équivalent à

$$J(\varphi_k) \ = \int_{-1}^{+1} \varphi_k(t)dt, \qquad \forall\ k = 1,2,3.$$

Ainsi:

$$\left\{ \begin{aligned}
\omega_1 &= \int_{-1}^{+1} \varphi_1(t)dt = \frac{\frac{1}{3}+\alpha}{1+\alpha}, && \text{pour } k=1, \\
\omega_2 &= \int_{-1}^{+1} \varphi_2(t)dt = \frac{4}{3(1-\alpha^2)}, && \text{pour } k=2, \\
\omega_3 &= \int_{-1}^{+1} \varphi_3(t)dt = \frac{\frac{1}{3}-\alpha}{1-\alpha}, && \text{pour } k=3.
\end{aligned} \right. \tag{1}$$

Avec ces choix de $\omega_i, i = 1, 2, 3$, notre formule de quadrature intègre exactement tous les polynômes de degré 2, quel que soit $\alpha \in]-1, +1[$.

3.b) Un polynôme p quelconque de degré 3 peut toujours être écrit comme $p(t) = at^3 + q(t)$ où q est un polynôme de degré 2. Notre formule de quadrature est exacte pour tous les polynômes de degré 3 si elle intègre exactement chacun des termes at^3 et $q(t)$. Les égalités $J(p) = \int_{-1}^{+1} p(t)dt \quad \forall\, p \in \mathbb{P}_3$, sont équivalentes à

$$a(\omega_1 t_1^3 + \omega_2 t_2^3 + \omega_3 t_3^3) + J(q) = a \int_{-1}^{+1} t^3 dt + \int_{-1}^{+1} q(t)dt \qquad \forall\, a \in \mathbb{R},\ \forall\, q \in \mathbb{P}_2.$$

Comme d'après le point **a)** nous savons que $J(q) = \int_{-1}^{+1} q(t)dt \ \forall\, q \in \mathbb{P}_2$, il suffit de chercher α tel que $\omega_1 t_1^3 + \omega_2 t_2^3 + \omega_3 t_3^3 = \int_{-1}^{+1} t^3 dt$. En utilisant (1) cette relation s'écrit $(1 + 3\alpha)(\alpha - 1) + 4\alpha^3 + (1 - 3\alpha)(\alpha + 1) = 0$, dont la seule solution dans l'intervalle $]-1, +1[$ est $\alpha = 0$. Les poids deviennent alors $\omega_1 = 1/3,\ \omega_2 = 4/3,\ \omega_3 = 1/3$.

3.c) La formule de Simpson est $J(g) = \frac{1}{3}g(-1) + \frac{4}{3}g(0) + \frac{1}{3}g(1)$. C'est bien la formule de quadrature que nous obtenons au point précédent. Nous avons donc démontré que la formule de Simpson intègre exactement les polynômes de degré 3.