Corrigé 3

Exercice 1

On cherche une formule de quadrature à $M = 2$ points $t_1 = -\alpha$, $t_2 = \alpha$ (avec $0 < \alpha \leqslant 1$) donnée par :

$$J(g) = \omega_1 g(-\alpha) + \omega_2 g(\alpha),$$

1.a) Selon le résultat du cours, la formule de quadrature est exacte à l'ordre $M - 1 = 1$, si et seulement si les poids ω_1 et ω_2 sont donnés par :

$$\omega_i = \int_{-1}^{+1} \varphi_i(t)dt, \quad i = 1, 2,$$

où les $\varphi_i(t)$ sont les fonctions de la base de Lagrange associées aux points t_1 et t_2. Dans notre cas, on a $\varphi_1(t) = \frac{1}{2} - \frac{t}{2\alpha}$ et $\varphi_2(t) = \frac{1}{2} + \frac{t}{2\alpha}$.

Après calcul, on obtient que les poids sont donnés par $\omega_1 = \omega_2 = 1$ et la formule de quadrature $J(g) = g(-\alpha) + g(\alpha)$ est exacte pour des polynômes de degré 1 pour tout $0 < \alpha \leqslant 1$.

1.b) Soit p un polynôme de degré 2. On a $p(t) = at^2 + q(t)$ où $a \in \mathbb{R}$ et q est un polynôme de degré 1. On a donc $J(p) = \int_{-1}^{+1} p(t)dt \; \forall p \in \mathbb{P}_2$, si et seulement si:

$$a(\omega_1 t_1^2 + \omega_2 t_2^2) + J(q) = a \int_{-1}^{+1} t^2 dt + \int_{-1}^{+1} q(t)dt \qquad \forall a \in \mathbb{R}, \forall q \in \mathbb{P}_1.$$

Comme d'après le point **1.a** nous savons que $J(q) = \int_{-1}^{+1} q(t)dt, \forall q \in \mathbb{P}_1$, la formule de quadrature est exacte pour les polynômes de degré 2 si et seulement si α est tel que $\omega_1 t_1^2 + \omega_2 t_2^2 = \int_{-1}^{+1} t^2 dt$, c'est-à-dire si $\alpha^2 + \alpha^2 = \frac{2}{3}$, i.e

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

La formule de quadrature $J(g) = g(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + g(\frac{1}{\sqrt{3}})$ est donc exacte pour les polynômes de degré 2. Lorsque $g(t) = t^3$, on a $J(g) = \int_{-1}^{+1} g(t)dt = 0$, la formule de quadrature $J(g) = g(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + g(\frac{1}{\sqrt{3}})$ est donc exacte pour les polynômes de degré 3. On vérifie sans peine que, pour $g(t) = t^4$, $J(g) = \frac{2}{9} \neq \frac{2}{5} = \int_{-1}^{+1} g(t)dt$, et donc la formule n'est plus exacte pour les polynômes de degré 4.

Exercice 2

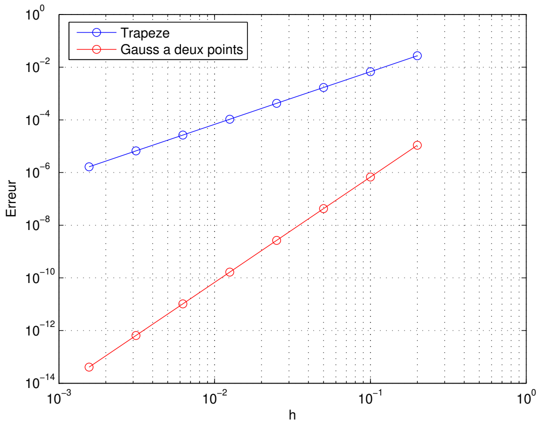
2.a) Par intégration par parties, on obtient :

$$\int_0^1 x^2 e^x dx = \left[x^2 e^x\right]_0^1 - \int_0^1 2xe^x dx = \left[x^2 e^x - 2xe^x\right]_0^1 + \int_0^1 2e^x dx = e - 2.$$

2.b) Le fichier `integration.m` est le suivant:

```
function [err_trap, err_gau2]=integration(N)
% ---------------------------
% Etant donne un entier N, on integre numeriquement la fonction f
% definie ci-apres sur l'intervalle [a,b] dont les bornes sont
% definies ci-dessous.
%
% parametres
% ----------
%  N        : nombre d'intervalles pour la discretisation de [a,b]
% sorties

% Bornes de l'intervalle
a = 0.;
b = 1.;

% Fonction f a integrer
% voir fin du fichier

% Valeur exacte de l'integrale de f sur [a,b] = [0,1]

  exact = exp(1) - 2;
% Pas d'espace
h = (b-a)/N;

% Formule du trapeze
% ------------------

Lhtrap = 0.;
for i=0:N-1
  xi=a+i*h;
  Lhtrap = Lhtrap +0.5*h*(f(xi)+f(xi+h));
end

% Formule de Gauss a deux points
% ------------------------------

Lhgau2 = 0.;

for i=0:N-1
  xi=a+i*h;
  Lhgau2 = Lhgau2 + 0.5*h*(f(xi+0.5*h*(-1/(sqrt(3))+1))+f(xi+0.5*h*(1/(sqrt(3))+1)));
end

err_trap = abs(exact-Lhtrap);
err_gau2 = abs(exact-Lhgau2);
end
```

2.c) L'erreur en fonction de h en échelle log-log est représentée ci-dessous:



Sur ce graphique, nous constatons que la formule du trapèze correspond à une droite de pente 2, alors que la formule de Gauss à deux points correspond à une droite de pente 4. Nous avons donc vérifié numériquement les estimations d'erreur (3).

Exercice 3

On considère la base de Lagrange φ_1, φ_2, φ_3 de $\mathbb{P}_2$ associée à t_1, t_2 et t_3. Tout polynôme p de degré 2 peut donc s'écrire comme

$$p(t) = p(t_1)\varphi_1(t) + p(t_2)\varphi_2(t) + p(t_3)\varphi_3(t),$$

où

$$\varphi_1(t) = \frac{(t-t_2)(t-t_3)}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)}, \qquad \varphi_2(t) = \frac{(t-t_1)(t-t_3)}{(t_2-t_1)(t_2-t_3)} \qquad \text{et} \qquad \varphi_3(t) = \frac{(t-t_1)(t-t_2)}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)}.$$

3.a) On sait que $J(p) = \displaystyle\int_{-1}^{+1} p(t)dt$ pour tout polynôme p de degré 2 si et seulement si

$$\omega_j = \int_{-1}^{+1} \varphi_j(t)dt, \qquad \forall\, j = 1, 2, 3.$$

Ainsi,

$$\left\{ \begin{array}{lcccl} \omega_1 & = & \displaystyle\int_{-1}^{+1} \varphi_1(t)dt & = & \displaystyle\frac{2}{3t_1(t_1-t_3)}, \\ \omega_2 & = & \displaystyle\int_{-1}^{+1} \varphi_2(t)dt & = & \displaystyle\frac{1}{t_1t_3}\left(\frac{2}{3} + 2t_1t_3\right), \\ \omega_3 & = & \displaystyle\int_{-1}^{+1} \varphi_3(t)dt & = & \displaystyle\frac{2}{3t_3(t_3-t_1)}. \end{array} \right.$$

3.b) Posons $t_2 = 0$ et $t_1 = -t_3 = -\alpha$, $\alpha \in]0, +1]$. Les poids correspondants sont alors donnés par

$$\begin{cases} \omega_1 &= \dfrac{1}{3\alpha^2}, \\ \omega_2 &= 2 - \dfrac{2}{3\alpha^2}, \\ \omega_3 &= \dfrac{1}{3\alpha^2}. \end{cases}$$

Un polynôme p quelconque de degré 3 peut toujours être écrit comme $p(t) = at^3 + q(t)$ où q est un polynôme de degré 2 et a un réel donné. Notre formule de quadrature est exacte pour tous les polynômes de degré 3 si elle intègre exactement chacun des termes at^3 et $q(t)$. Donc $J(p) = \int_{-1}^{+1} p(t)dt$ pour tout polynôme p de degré 3 si et seulement si

$$a(\omega_1 t_1^3 + \omega_2 t_2^3 + \omega_3 t_3^3) + J(q) = a \int_{-1}^{+1} t^3 dt + \int_{-1}^{+1} q(t)dt.$$

D'après le point précédent, nous savons que $J(q) = \int_{-1}^{+1} q(t)dt$ pour tout polynôme q de degré 2. Il suffit donc de vérifier que $\omega_1 t_1^3 + \omega_2 t_2^3 + \omega_3 t_3^3 = \int_{-1}^{+1} t^3 dt$. En utilisant l'expression des poids déterminée ci-dessus, cette relation s'écrit $(-\alpha)^3 \dfrac{1}{3\alpha^2} + 0 + \alpha^3 \dfrac{1}{3\alpha^2} = 0$, ce qui est vérifié pour tout $\alpha \in]0, +1]$. La formule de quadrature est donc exacte pour les polynômes de degré 3 lorsque $t_1 = -\alpha$, $t_2 = 0$ et $t_3 = \alpha$, $\forall \alpha \in]0, +1]$.

3.c) D'après le point précédent, nous savons que $J(q) = \int_{-1}^{+1} q(t)dt$ pour tout polynôme q de degré 3 si $t_2 = 0$ et $t_1 = -t_3 = -\alpha$, $\alpha \in]0, +1]$. Pour que notre formule de quadrature soit exacte pour tout polynôme q de degré 4, il suffit de vérifier que $\omega_1 t_1^4 + \omega_2 t_2^4 + \omega_3 t_3^4 = \int_{-1}^{+1} t^4 dt$. En utilisant les poids ci-dessus, on obtient $(-\alpha)^4 \dfrac{1}{3\alpha^2} + 0 + \alpha^4 \dfrac{1}{3\alpha^2} = \dfrac{2}{5}$. Comme $\alpha \in]0, +1]$, cette relation est vraie lorsque $\alpha = \sqrt{\dfrac{3}{5}}$ et, dans ce cas, la formule est exacte pour tout polynôme de degré 4 et les poids sont $\omega_1 = \omega_3 = \dfrac{5}{9}$ et $\omega_2 = \dfrac{8}{9}$.

3.d) On vérifie que, lorsque $t_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$, $t_2 = 0$ et $t_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}$, $\omega_1 t_1^5 + \omega_2 t_2^5 + \omega_3 t_3^5 = \int_{-1}^{+1} t^5 dt$ et donc la formule est exacte pour tous les polynômes de degré 5.