Corrigé 2

Exercice 1

Dans cet exercice nous utiliserons les notations $f'(x)$, $f''(x)$, $f^{(3)}(x)$, $f^{(4)}(x)$ pour $\frac{d}{dx}f(x)$, $\frac{d^2}{dx^2}f(x)$, $\frac{d^3}{dx^3}f(x)$ et $\frac{d^4}{dx^4}f(x)$ respectivement.

1.a) Rappelons que l'opérateur de différence première centrée δ_h appliqué à une fonction f est défini par $\delta_h f(x) = f(x+\frac{h}{2}) - f(x-\frac{h}{2})$. Nous pouvons donc écrire

$$\begin{aligned}
\delta_h\Big(a(x)\delta_h f(x)\Big) &= \delta_h\Big(a(x)\big(f(x+\tfrac{h}{2}) - f(x-\tfrac{h}{2})\big)\Big)\\
&= a(x+\tfrac{h}{2})\big(f(x+h)-f(x)\big) - a(x-\tfrac{h}{2})\big(f(x)-f(x-h)\big)\\
&= a(x-\tfrac{h}{2})f(x-h) - \Big(a(x-\tfrac{h}{2}) + a(x+\tfrac{h}{2})\Big)f(x) + a(x+\tfrac{h}{2})f(x+h).
\end{aligned}$$

1.b) Du point **1.a)** nous déduisons en posant $a(x) = 1+x$ que

$$\delta_h\Big((1+x)\delta_h f(x)\Big) = (1+x-\tfrac{h}{2})f(x-h) - 2(1+x)f(x) + (1+x+\tfrac{h}{2})f(x+h).$$

Le développement limité à l'ordre 4 de la fonction f autour du point x nous donne

$$\begin{aligned}
f(x-h) &= f(x) - \frac{1}{1!}f'(x)h + \frac{1}{2!}f''(x)h^2 - \frac{1}{3!}f^{(3)}(x)h^3 + \frac{1}{4!}f^{(4)}(\eta_-)h^4,\\
f(x+h) &= f(x) + \frac{1}{1!}f'(x)h + \frac{1}{2!}f''(x)h^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(x)h^3 + \frac{1}{4!}f^{(4)}(\eta_+)h^4,
\end{aligned}$$

avec $\eta_- \in [x-h, x]$ et $\eta_+ \in [x, x+h]$. Nous en déduisons que

$$\begin{aligned}
\delta_h\Big((1+x)\delta_h f(x)\Big) =&(1+x-\tfrac{h}{2})f(x) - (1+x-\tfrac{h}{2})f'(x)h + \frac{1}{2}(1+x-\tfrac{h}{2})f''(x)h^2 -\\
&\frac{1}{6}(1+x-\tfrac{h}{2})f^{(3)}(x)h^3 + \frac{1}{24}(1+x-\tfrac{h}{2})f^{(4)}(\eta_-)h^4 - 2(1+x)f(x)\\
&+ (1+x+\tfrac{h}{2})f(x) + (1+x+\tfrac{h}{2})f'(x)h + \frac{1}{2}(1+x+\tfrac{h}{2})f''(x)h^2\\
&+ \frac{1}{6}(1+x+\tfrac{h}{2})f^{(3)}(x)h^3 + \frac{1}{24}(1+x+\tfrac{h}{2})f^{(4)}(\eta_+)h^4\\
=&f'(x)h^2 + (1+x)f''(x)h^2 + \frac{1}{6}f^{(3)}(x)h^4\\
&+ \frac{1}{24}\Big((1+x-\tfrac{h}{2})f^{(4)}(\eta_-) + (1+x+\tfrac{h}{2})f^{(4)}(\eta_+)\Big)h^4,
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé les relations

$$(1+x+\tfrac{h}{2}) - (1+x-\tfrac{h}{2}) = h \qquad \text{et} \qquad (1+x+\tfrac{h}{2}) + (1+x-\tfrac{h}{2}) = 2(1+x).$$

En remarquant que $\dfrac{d}{dx}\Big((1+x)f'(x)\Big) = f'(x) + (1+x)f''(x)$ et en dénotant

$$e_h = \left| \frac{\delta_h\Big((1+x)\delta_h f(x)\Big)}{h^2} - \frac{d}{dx}\Big((1+x)f'(x)\Big) \right|$$

nous obtenons lorsque $h \leqslant h_0$:

$$\begin{aligned}
e_h &= \left| \frac{1}{6} f^{(3)}(x) h^2 + \frac{1}{24}\Big((1+x-\tfrac{h}{2})f^{(4)}(\eta_-) + (1+x+\tfrac{h}{2})f^{(4)}(\eta_+)\Big) h^2 \right| \\
&\leqslant \frac{1}{6}\left(\left|f^{(3)}(x)\right| + \frac{|1+x-\frac{h}{2}|}{4}\left|f^{(4)}(\eta_-)\right| + \frac{|1+x+\frac{h}{2}|}{4}\left|f^{(4)}(\eta_+)\right| \right) h^2 \\
&\leqslant \frac{1}{6}\left(\left|f^{(3)}(x)\right| + \frac{|1+x-\frac{h}{2}| + |1+x+\frac{h}{2}|}{4} \max_{\eta\in[x-h_0,x+h_0]} \left|f^{(4)}(\eta)\right| \right) h^2 \\
&\leqslant \frac{1}{6}\left(\left|f^{(3)}(x)\right| + \frac{2+2|x|+h_0}{4} \max_{\eta\in[x-h_0,x+h_0]} \left|f^{(4)}(\eta)\right| \right) h^2.
\end{aligned}$$

Nous avons donc le résultat voulu avec la constante

$$C = \frac{1}{6}\left|f^{(3)}(x)\right| + \frac{2+2|x|+h_0}{24} \max_{\eta\in[x-h_0,x+h_0]} \left|f^{(4)}(\eta)\right| > 0\ ,$$

qui est bien indépendante de h, mais dépend tout de même de x et de h_0. Ainsi la formule de différences finies $\frac{\delta_h((1+x)\delta_h f(x))}{h^2}$ utilisée pour approximer $\frac{d}{dx}\big((1+x)f'(x)\big)$ au point x est consistante à l'ordre 2 en h.

Exercice 2

2.a) On commence dans un premier temps par effectuer les développements de Taylor suivants:

$$\begin{aligned}
f(x_0+2h) &= f(x_0) + f'(x_0)2h + \frac{f''(x_0)}{2}4h^2 + \frac{f^{(3)}(\xi)}{6}8h^3,\ \xi\in[x_0,x_0+2h] \quad (1) \\
f(x_0+h) &= f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + \frac{f^{(3)}(\eta)}{6}h^3,\ \eta\in[x_0,x_0+h]. \quad (2)
\end{aligned}$$

On a donc, en soustrayant l'équation (1) à quatre fois l'équation (2):

$$4f(x_0+h) - f(x_0+2h) = 3f(x_0) + 2f'(x_0)h + \frac{2}{3}f^{(3)}(\eta)h^3 - \frac{4}{3}f^{(3)}(\xi)h^3,$$

soit:

$$\begin{aligned}
\left| f'(x_0) - \frac{4f(x_0+h) - f(x_0+2h) - 3f(x_0)}{2h} \right| &= \left| \frac{2}{3}f^{(3)}(\xi)h^2 - \frac{1}{3}f^{(3)}(\eta)h^2 \right|, \\
&\leqslant \frac{2}{3}|f^{(3)}(\xi)|h^2 + \frac{1}{3}|f^{(3)}(\eta)|h^2.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\left| f'(x_0) - \frac{4f(x_0+h) - f(x_0+2h) - 3f(x_0)}{2h} \right| \leqslant h^2 \max_{x\in[x_0,x_0+2h_0]} |f^{(3)}(x)|. \quad (3)$$

En posant $C = \max_{x\in[x_0,x_0+2h_0]} |f^{(3)}(x)|$, dans l'équation (3), on a donc montré que pour toute fonction trois fois continûment dérivable, il existe $C > 0$ telle que pour tout $0 < h \leqslant h_0$:

$$\left| f'(x_0) - \frac{4f(x_0+h) - f(x_0+2h) - 3f(x_0)}{2h} \right| \leqslant Ch^2.$$

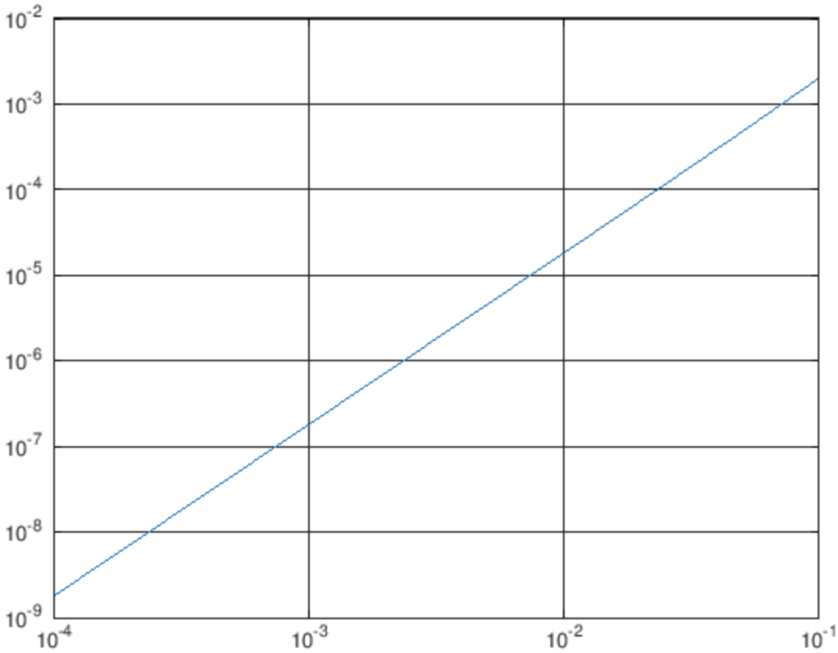
2.b) Les résultats sont dans le tableau et sur le graphe suivant. Par exemple:

```
bdf2(1,0.0001);
```

h	Erreur
0.1	$1.584693 \cdot 10^{-03}$
0.05	$4.235730 \cdot 10^{-04}$
0.025	$1.092517 \cdot 10^{-04}$
0.0125	$2.855007 \cdot 10^{-05}$
0.0001	$1.802408 \cdot 10^{-09}$

```
hh = [0.1, 0.05, 0.025, 0.0125,0.0001];
erreur = [1.584693e-03, 4.235730e-04, 1.092517e-04, 2.855007e-05,
    1.802408e-09];
```

```
loglog(hh,erreur);grid;
```



Exercice 3

3.a) On a:

$$\begin{aligned} \Delta_h^2 f(x_0) &= \Delta_h \left(f(x_0+h) - f(x_0) \right), \\ &= \Delta_h \left(f(x_0+h) \right) - \Delta_h(f(x_0)), \\ &= f(x_0+2h) - 2f(x_0+h) + f(x_0). \end{aligned}$$

3.b) On effectue dans un premier temps les développements de Taylor suivants:

$$f(x_0+2h) = f(x_0) + f'(x_0)2h + \frac{f''(x_0)}{2}4h^2 + \frac{f^{(3)}(\xi)}{6}8h^3, \quad \xi \in [x_0, x_0+2h]$$
$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + \frac{f^{(3)}(\eta)}{6}h^3, \quad \eta \in [x_0, x_0+h].$$

On a donc, en soustrayant deux fois la deuxième équation à la première équation:

$$\Delta_h^2 f(x_0) = f''(x_0)h^2 + \frac{8}{6}f^{(3)}(\xi)h^3 - \frac{2}{6}f^{(3)}(\eta)h^3.$$

Du coup,

$$\begin{aligned}
\left|f''(x_0) - \frac{\Delta_h^2 f(x_0)}{h^2}\right| &= \left|f''(x_0) - f''(x_0) - \frac{8}{6}f^{(3)}(\xi)h + \frac{2}{6}f^{(3)}(\eta)h\right|, \\
&= \left|-\frac{4}{3}f^{(3)}(\xi)h + \frac{1}{3}f^{(3)}(\eta)h\right|, \\
&\leqslant \frac{4}{3}h|f^{(3)}(\xi)| + \frac{1}{3}h|f^{(3)}(\eta)|, \\
&\leqslant h\left(\frac{4}{3}|f^{(3)}(\xi)| + \frac{1}{3}|f^{(3)}(\eta)|\right).
\end{aligned}$$

Puisque $|f^{(3)}(\xi)|$, $|f^{(3)}(\eta)| \leqslant \max\limits_{x\in[x_0,x_0+2h_0]} |f^{(3)}(x)|$, on a:

$$\left|f''(x_0) - \frac{\Delta_h^2 f(x_0)}{h^2}\right| \leqslant \frac{5}{3}h \max_{x\in[x_0,x_0+2h_0]} |f^{(3)}(x)|, \qquad \forall h \in (0, h_0].$$

En posant $C = \frac{5}{3}\max_{x\in[x_0;x_0+2h_0]} |f^{(3)}(x)|$, on obtient finalement:

$$\left|f''(x_0) - \frac{\Delta_h^2 f(x_0)}{h^2}\right| \leqslant Ch, \quad \forall h \in (0, h_0].$$

3.c) Les lignes, une fois complétés, sont les suivantes:

```
funct = sin(2*pi*x);
```

```
dfunct = -(2*pi)*(2*pi)*sin(2*pi*x);
```

On obtient alors le tableau suivant:

h	$\left\|f''(x_0) - \frac{\Delta_h^2 f(x_0)}{h^2}\right\|$
0.1	15.095
0.01	0.8522
0.001	7.7516e−02
0.0001	7.6738e−03
0.00001	7.6289e−04

Nous avons représenté dans le graphique ci-dessous l'erreur entre $f''(x_0)$ et la formule de differences finies $\Delta_h^2 f(x_0)/h^2$ en fonction de h en échelle log-log. Lorsque h est *raisonnablement* petit, on observe une pente de 1, ce qui correspond au fait que $\left|f''(x_0) - \frac{\Delta_h^2 f(x_0)}{h^2}\right| = \mathcal{O}(h)$.

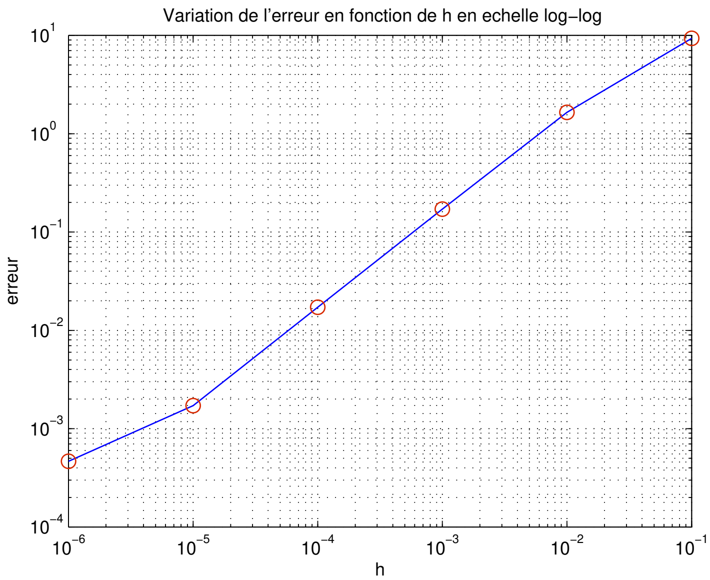


Figure 1: Erreur en fonction de h.